با نامِ والایِ او

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

در ۴ درس

درس اول

مفاهیم بنیادین

آیهٔ ﴿وَاللهُ اَخرَجَکُم مِن بُطونِ اُمهاتِکُم لاتَعلَمونَ شَیئًا وَ جَعَلَ لَکُمُ السَمعَ وَ الاَبصارَ وَ الاَفئِدَهَ لَعَلَکُم تَشکُرونَ﴾[1]، راهنمایی‌هایِ فراوانی دارد ولی آنچه در ابتدا می‌خواهم پیش بکشم، موضوعِ "علم به شیئ‌ای" یا همان "دانستنِ چیزی" است. وقتی می‌فرماید: "چیزی نمی‌دانید درحالیکه جعل کرد برایتان شنوایی و بینایی و امکاناتِ فراوانِ عمل(کارهایِ دل)"، می‌خواهد بگوید با استفادهٔ مناسب از اینهاست که شما دانشی نسبت به چیزها می‌یابید. گو اینکه داستان این است: در ابتدا چیزی نمی‌دانم ولی ابزارهای لازم برای دانستن، فراهم است و فقط لازم است بگونهٔ مناسبی از آنها استفاده کنم.

و اما کمی دربارهٔ این سه

شنیدن در قرآن به این معنی است که من از دیگری که مرا مخاطب قرار داده، بشنوم. گویی او با من کاری دارد. **دستور** می‌دهد، **راهنمایی** می‌کند. بعنوان نمونه می توانید توجه کنید به: تمامی افعال امری که از طرفِ قرآن به ما داده شده است و قرآن انتظار دارد که در درجهٔ اول، ما آنها را بخوبی بشنویم. بعنوان نمونه، اولین دستور قرآن خطاب به همهٔ مردم است و این است: ﴿یا ایهاالناس اعبدوا ربکم الذی خلقکم والذین من قبلکم لعلکم تتقون﴾[2]. یا **بینشی** می‌دهد، یعنی مقدماتی فراهم نموده تا تو بتوانی ببینی و اصطلاحاً بینش پیدا کنی نسبت به چیز یا چیزهایی که اگر اقدام کنی برای خودت مفید خواهد بود. قرآن در سورهٔ انعام پس از شرحی در بسیاری از مخلوقاتِ خداوند چنین می‌گوید: ﴿قد جائکم بَصائر مِن ربکم فمَن اَبصر فلنفسه و مَن عَمِیِ فعلیها و ما أَنت علیهم بِحَفیظ﴾[3]. یا **خبرهایی** می‌دهد، قرآن در سورهٔ یوسف، پایانِ قصه چنین می‌گوید: ﴿ذلک مِن اَنباءِ الغیب نوحیه الیک و ما کنت لدیهم اذ اَجمعوا اَمرهم و هم یَمکرون﴾[4]، اخباری نهان است که به سوی تو وحی می‌کنیم.

یک پرسش ساده: آیا طفل می‌شنود؟ نه اینکه آیا گوشِ او کار می‌کند یا نه! بلکه آیا کسی یا کسانی **به او** چیزی یا چیزهایی می‌گویند و انتظار داشته باشند که بشنود؟

[1]سورهٔ نحل(۱۶) آیهٔ ۷۸
[2]سورهٔ بقره(۲) آیهٔ ۲۱
[3]سورهٔ انعام(۶) آیهٔ ۱۰۴
[4]سورهٔ یوسف(۱۲) آیهٔ ۱۰۲

یک پاسخ ساده: البته هر چند که اوایل را یادمان نمی‌آید ولی قطعاً از موقعیکه یادمان می‌آید، یادمان هست که بزرگترهامان چیزهایی به ما می‌گفتند. ولی راستی قبل از آن چه؟! .

بینایی در قرآن به این معنی است که ما، نه به این دلیل که مخاطب شده باشیم، بلکه نگاه نموده و دریافتی می‌کنیم و بینشی می‌یابیم. در اینجا گویی کسی با شما کاری ندارد بلکه خودتان‌اید که با اشیاء کار دارید و سراغِ آنها می‌روید و می‌خواهید دریافت‌هایی داشته باشید و دریافتی می‌کنید و مثلاً می‌گوییم : حس کردم(احساسِ شیئ)، شعور یافتم(شعورِ شیئ)، شناختم(معرفتِ شیئ)، درک کردم(ادراکِ شیئ). اینها مراتبِ گوناگونِ بینش از دیدگاه قرآن است که به ترتیب کامل‌ترند که فعلاً موضوعِ بحث نیستند و فقط برای توجه شما آورده شد.

دوباره پرسشی ساده: آیا طفل می‌بیند؟ لابد این بار بی‌درنگ می‌فرمایید بله حتماً !!!

کارهایِ دل در قرآن بطور خلاصه عبارت است از تصمیم‌سازی‌ها و انجامِ آنها. به عنوان نمونه درست است که ما چشم داریم و می‌توان با آن به چیزهایی نگاه نموده و تصویری یافت. گوش داریم و می‌توان با آن به اصواتی که هست توجه نموده و صدایی را حس نمود. ولی اگر نخواهیم و تصمیم نگیریم که چنین کنیم هرگز نه تصویری برای ما شکل می‌گیرد و نه صدایی شنیده می‌شود! چشمی که پرده‌ای ضخیم جلوی آن گذارده باشیم و حاضر هم نباشیم که آنرا کنار بزنیم، هرگز بینشی نمی‌بخشد. گوشی که بکار گرفته نشود هر چند که سنگین نباشد نخواهد توانست بینشی از اصوات برای ما بدهد. لذاست که در بسیاری از موارد مهم، این ما هستیم که حتی تصمیم می‌گیریم، ببینیم و یا بشنویم و یا عمل دیگری بانجام رسانیم. توجه کنید که خیلی از اوقات حتی شما منظره‌ای را می‌بینید ولی چون موضوعِ خاصی را در آن تصویر دنبال می‌کنید فقط و فقط آنرا می‌بینید و نه بقیهٔ آنچه در تصویر بوده است و اگر موضوعیتی نداشته اصولاً گویی چیزی را ندیده‌اید. بشنوید این مهم را چگونه قرآن می‌گوید: ﴿أفلم یسیرو فی الارض فتکون لَهم قلوب یعقلون بِها أَو اذان یَسمعون بِها فاِنها لا تَعمَی الاَبصار و لکن تَعمَی القلوبُ التی فی الصُدور﴾[5] . یا بشنوید: «و منهم من یستمعون الیک اَفَاَنت تُسمِعُ الصمَ و لو کانوا لا یعقلون«و منهم من یَنظر الیک اَفَاَنت تهدی العمی و لو کانوا لا یبصرون»[6] اصولاً حفظ مشاهدات، تعقل و

[5] سورهٔ حج(۲۲) آیهٔ ۴۶

[6] سورهٔ یونس(۱۰) آیهٔ ۴۲-۴۳

سپس شاید تصمیماتی در رابطه با آنها و ... همه دستهٔ دیگری از امکانات در اختیارِ شماست که برای پیشرفت شما پروردگارتان قرار داده است. این کارهایِ شما در قرآن، **کارهایِ دل** نامیده شده است. شاید در فارسی بتوان کارهایِ ذهن و هوش را مترادف با آن گرفت.

ریشه‌یابیِ دانشِ ما

به نظر می‌رسد که از نظر قرآن، دانشِ نسبت به چیزها از درست کنارِ هم قرارگیریِ این سه و البته همکاریِ دائمی آنها با هم در ما، شکل می‌گیرد. حال بیایید بر این پایه، دانش‌مان از چیزها را ریشه‌یابی کنیم.

از دیدگاهِ قرآن اینکه بتوان درستی یا نادرستیِ گزاره‌ای را دربارهٔ چیزی یا چیزهایی، بار نمود، آنگاه اگر کسی درست یا نادرست بودنش را بگوید، قرآن می‌گوید: او می‌داند که آن(گزاره) درست است،... فاما الذین امنوا فیعلمون انه الحق من ربهم... [۷] . حال اگر کسی به حالِ گوینده کاملاً بینا باشد و ببیند که او راستگو است و دروغگو نیست، می‌تواند نتیجه بگیرد که او آنرا واقعاً می‌داند. در این مورد قرآن می‌گوید *بل الانسان علی نفسه بصیره*[۸] لذاست که ما خود بخوبی بینش داریم که آیا آنرا می‌دانیم یا نمی‌دانیم! پس، **چنانچه ما به گزاره‌ای دربارهٔ چیزی بتوانیم صادقانه گواهی دهیم، اصطلاحاً گفته می‌شود که ما نسبت به آن چیز علمی یافته‌ایم. البته این علم همان است که در آن گزاره آمده است.** یعنی وقتی که بتوانیم صادقانه بگوییم که بهمان گزاره دربارهٔ فلان چیز، حق(درست) است و یا باطل(نادرست) است، در واقع تازه گفته می‌شود که ما نسبت به فلان چیز، علمی(دانشی) داریم.

حال باید دید نسبت به چه چیزهایی ما می‌توانیم گواهیِ صادقانه دهیم. به نظر می‌رسد که ما نسبت به آنچه بینش(حس، شعور، معرفت و یا ادراکی) یافته‌ایم نه بیشتر و نه کمتر، می‌توانیم شهادتی صادقانه دهیم. پس علمِ ما به چیزها، نهایتاً بر می‌گردد به بینش ما از آنها. هر چه بینش ما تیزتر گردد علم‌هایی که نزد ماست نیز می‌تواند بیشتر گردد.

---

[۷] سورهٔ بقره(۲) آیهٔ ۲۶

[۸] سورهٔ قیامه(۷۵) آیهٔ ۱۴

مثلاً وقتی می‌گویی لیوانی روی میز است. منظورتان این است که هم‌اکنون شما تصویری را می‌بینید که در آن لیوانی رویِ میز است. در واقع شما می‌گویید : این **درست** است که: **من** لیوانی را رویِ میز می**بین**م. هرگاه می‌گویید "این را دربارهٔ **چیز(ها)** می**دانم**" یعنی : "این **درست** است که : **من** از آن **چیز(ها) بینش**ی دارم" .

بینشِ کامل و بیناهایِ دیگر

حال وقت آن است که به موارد زیر توجه جدی کنیم:

دانستنِ گزاره‌ای از چیزی به معنیِ بینشِ کامل به آن چیز نیست. بلکه فقط **درست** بودنِ **بینش**ی از آن چیز نزدِ من است که به دقت نیز آنرا باید یادآور گردم. نکتهٔ بسیار بسیار مهم که قرآن به آن راهنمایی می‌کند این است که همانگونه که ما بسیاری بینشهایی داریم و تجربه می‌کنیم، بسیاری را هم ندیده‌ایم و نمی‌بینیم: فلا اقسم بما تبصرون(آنچه **شما** می‌بینید)* و ما لا تبصرون(و آنچه **شما** نمی‌بینید)*[۹] یعنی باید توجه نمود که بینش‌ها گوناگون است، کسی تیزبین‌تر از دیگری است. راهِ تیزبینیِ بیشتر نیز در قرآن آمده است که فعلاً موضوع بحث ما نیست. فقط مهم این است که توجه کنیم که اولاً بینشِ خودمان نسبت به چیزها مرتباً می‌تواند دقیق و دقیقتر گردد و همین گفتگو از **بینشِ فعلیِ** ماست که حکایت از علمی نزدِ ما می‌کند. لذاست که تو یا چیزی را می‌دانی یا نمی‌دانی! نمی‌شود که بگویی: کمی می‌دانم!!! بلکه آنچه می‌توان و باید گفت این است که: من کمی می‌بینم و لذا من کم می‌دانم! اندک بینشی یافته‌ام که با توجه به آن می‌گویم : فلان را می‌دانم ولی آنچه می‌دانم کم است نسبت به بسیاری از چیزها که نمی‌دانم و البته آنچه می‌دانم که می‌دانم. این تفاوتِ گویش می‌تواند مشکلاتِ فراوانی ایجاد کند و به نظرم ایجاد کرده است.

کاملاً ممکن است که بیناهایِ دیگری باشند که بسیار تیزبین‌تر از من باشند و چیزهایی را که من حتی حس نمی‌کنم آنها نه تنها حس کنند بلکه کاملاً درک کنند.

پس شنیده‌ها به چه دردی می‌خورند؟

پس شنیده‌ها به چه دردی می‌خورند؟ استفادهٔ مناسب از شنیده‌ها(شُکرِ شنیده‌ها) این است که چنانچه از پرورش‌دهنده‌مان بود(چه با واسطه و چه بی‌واسطه)، بدقت بکار بندیم. که از این رهگذر به بینش‌های بیشتر نائل

---

[۹] سورهٔ حاقه(۶۹) آیهٔ ۳۸ و ۳۹

می‌گردیم. بعبارت بهتر متقی که ایمان به غیب یعنی حداقلِ توجه به ما لا تبصرون، دارد، همواره بدنبالِ تبدیلِ "ما لا" به "ما" است. ملاحظه کنید: اللهم ارنی الاشیاء کما هی! خدایا بنما به من چیزها را همانگونه که آنهایند. این یعنی اوجِ بصیرت و بینش را خواستن! لذاست که همانگونه که هیچ تعلیمی بدون معلم نمی‌شود هیچ علمی هم بدونِ شنیدنِ راهنمایی‌ها، دستورات و بینش‌های رسیده از تربیت‌کنندهٔ ما حاصل نمی‌گردد. لذا با کمی تواضع آری فقط با کمی!، داستان روشن است.

لذا وقتی کسی دستورِ خاصی را از خدا دریافت می‌کند هر چند که شاید جزئیاتِ دلایل آنرا بخوبی نمی‌داند ولی دل‌اش اقدام به عمل می‌کند، نه تنها نباید مورد شماتت قرار گیرد و گفته شود: او کورکورانه اطاعت می‌کند! بلکه باید به آن کسی که شنوایی‌اش تعطیل شده، خرده گرفت که چرا دل‌ات کور شده و راهنماییِ کسی را که از تو بینشِ بیشتری دارد و در واقع مالک بینشِ توست و حتماً برای تیزبین شدنِ توست که راه می‌نماید و تو این را خوب دانسته‌ای، چرا عمل نمی‌کنی!!! و اگر هم این را ندانسته‌ای، که چه موضوعِ مهمی را نادانی و لذا نادانِ واقعی تویی! چرا کری و کوری و دل‌ات را بکار نمی‌اندازی تا بروی و این موضوعِ بسیار مهم را بدانی! بدانی که چنین پیامی و چنان بینشهایی برایت آورده شده و تو باید با پیگیریِ آنها و سعی در هر چه بهتر دیدنِ آنها، تیزتر و تیزتر گردی!

رابطهٔ من با پروردگارم بسیار شباهت دارد با رابطهٔ من با معلمِ دلسوزی که قصد تربیت مرا دارد. امر و نهیِ او برایِ بازتر و تیزتر شدنِ دیدگانِ من است و نه برایِ کور و کورتر شدنم. اما این مسیر با حرف‌شنوی از اوست که پیش می‌رود. لذا کورِ واقعی آن است که معلم را ندیده و نمی‌بیند و اوست که کورکورانه می‌رود. پس ماجرا بسیار ساده است. آنکه کوریِ خود نسبت به بسیاری از چیزها را نمی‌بیند و از غروری بی‌جا برخوردار است هرگز تن به تعلیم و تربیت توسطِ پروردگارش نمی‌دهد و این دقیقاً نقطهٔ سقوط است. اینجاست که روشن است که تزکیه(پاکسازیِ خود از غرور نسبت به پروردگار)، لازمهٔ هموارهٔ پیشرفت است.

دو نوع علم و موضوع بیان؟!

پس ما ظاهراً دارایِ دو نوع علم خواهیم بود: یکی آنهاییکه با بینشِ خودمان بوده است(البته هیچ چیزی که بدون خدا معنی ندارد او مالک بینایی من است) . دیگری هم آنهاییکه با بینشِ تیزبین‌تر از من است ولی من او را صادق دیده‌ام و به این واسطه است که به آن دانش دست یافته‌ام. یعنی آنچه می‌بینم صداقتِ اوست و این

برایِ من حجت است که به آن دانش تکیه کنم و باید تکیه کنم. علمِ به صداقتِ او و علمِ به علمِ او با هم جمع شده و یک علمی برای من ایجاد می‌کند که بسیار پر ارزش است چرا که بخوبی می‌دانم، بسیار نمی‌دانم. پس بهتر است حتماً با علمِ هر چه کاملتری وارد عمل گردم و به همین ترتیب. پس دانش‌های ما یا از دیدن‌هایِ دیگران(شنیدنی) است یا از دیدن‌هایِ خودمان(دیدنی) است. از همین روست که حضرت علی علیه‌السلام فرمودند: **العلم وراثه کریمه**[10]، دانش به ارث رسیدنیِ بسیار بزرگوارانه است. یعنی اولاً دانش می‌تواند به ارث برسد، ثانیاً چنانچه چنین شود عملی بزرگوارانه صورت پذیرفته است و لذاست که قرآن تأکید فراوان دارد که: **وَاسمَعوُا** ، و بشنوید. شاید این حدیث شریف از زبان امیر المؤمنین علیه السلام نیز ناظر به همین دو نوع علم باشد: **العلم علمان مسموعٌ و مطبوعٌ لایَنفعُ المسموعَ اِذا لَم یَکن المطبوع** : علم دو گونه است شنیده و طبع شده، بدرد نمی‌خورد شنیده، چنانچه طبع نشده باشد.

بیان و داستانِ "شنیدن کِی بُوَد مانند دیدن"

چه بخواهیم بشنویم(به ارث ببریم) و چه بخواهیم از دانشی نزدِ خود به دیگران بگوییم(به ارث گذاریم) نیاز به **بیان** داریم. از همین روست که قرآن می‌فرماید: ×و لقد اَنزلنا اِلیک ایاتٍ بیناتٍ و ما یَکفر بها اِلا الفاسقون×[11] . اولاً انزال است، ثانیاً آیه(نشانه)هاست ثالثاً **"بیان کننده" و روشن و شفاف کننده** هستند. آنگاه در جای دیگر دربارۀ این بیان نیز فرمود: بلسانٍ عربیٍ مبینٍ یعنی این به **زبانِ عربیِ "بیان شده"** انزال شده است. پس هر بیانی همراه با یک انزالی است و به هرحال برای این انزال نیز زبانی لازم است که پیشتر بیان شده باشد. همین **بیان** نیز اساساً توسط خداوند است که به انسان آموزش داده شده است. بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم×الرحمن× علم القرآن× خلق الانسان× علمه البیان×[12]

به این ترتیب شنیدنی‌ها نیز توسطِ بیان و سپس لسانِ بیان دیده می‌شوند و البته حال مانندِ هر دیدنی می‌تواند، هر چه بهتر دیده شود که به قولِ قرآن با تَدبُرِ هر چه بیشتر که کارِ دل است. ولی این دیدنِ شنیده، در این مرحله، هر چند هم که تیزبینانه‌تر شود، درحالِ شنیدنِ هر چه بهتر است. بعبارتی پیام، دقیق‌تر دریافت

[10] قسمتی از حکمتِ ۵ نهج‌البلاغه
[11] سورۀ بقره(۲) آیۀ ۹۹
[12] سورۀ رحمن(۵۵)آیه‌های ۱-۴

می‌گردد اما این با بینشی که بینندهٔ اصلی دیده است و درحالِ انتقال آن به شماست، می‌تواند فرسنگ‌ها فاصله داشته باشد. اینجاست که می‌گویند: شنیدن کِی بُوَد مانند دیدن؟!

یک نمونه: در قرآن از جهنم و اوصاف آن و از بهشت و اوصاف آن بسیار گفته می‌شود. آیا بسیاری از مردم اینها را دیده‌اند؟ لابد پاسخ می‌دهید خیر! ولی همگی شنیده‌ایم. هر چند هم که سعی کنیم عربیِ خود را قوی‌تر نموده تا فهمِ بهتری از این بینات داشته باشیم با حس و شعر و معرفت و درکی که می‌تواند با سعی ما در دیدنِ جهنم برایِ ما حاصل گردد حتماً متفاوت است. شاید مانندِ کسی که حتی تا بحال آتش را ندیده ولی شما که بارها حتی توسط آتش سوخته‌اید سعی کنید که از آتش و سوزندگی آن به او بیانی داشته باشید. البته قرآن با هنرمندیِ تمام، آن جهنم را آموزش می‌دهد تا جاییکه بتوان آنرا در مراحلِ گوناگونِ دیدن، دید. بشنوید که قرآن می‌گوید جحیم را می‌توان دید: ×بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم× الهیکم‌التکاثر× حتی‌زرتم‌المقابر× کلاسوف‌تعلمون× ثم‌کلاسوف‌تعلمون× کلالوتعلمون‌علم‌الیقین× لترون‌الجحیم× ثم‌لترونها عین‌الیقین× ثم‌لتسئلن‌یومئذعن‌النعیم×[13]

باید توجه شما را جلب کنم که عمومِ آموزش‌ها برای ما دارایِ این مراحل است! وقتی معلم سر کلاس برای شما از چیزهایی و در واقع از دیده‌های خود بیان می‌کند، شما تا در آزمایشگاه آنها را نبینید(تجربه نکنید)، آن درک بسیار لذت‌بخش را نخواهید چشید. پس سعی در دیدنِ شنیده‌ها همان مسیرِ علمی است که قرآن بهترین آموزگار این روش هم هست! اگر توجه کنیم. اینگونه است که قرآن برای تمامیِ علومِ مورد نیاز بشر پایدارترین راه است. اِنَ هذَا القرآنَ یَهدی لِلَتی هِیَ اَقوَم[14]...

اگر خدا در قرآنش از آتشِ جهنم گفتگو می‌کند، آتشی نیز در دنیا دمِ دست گذارده که سوزشِ آن و همه چیز مربوط به آنرا پیشتر به ما یاد داده و حالا با همین بیانِ تعلیم داده شده به ما، در مورد آتشِ جهنم می‌گوید.

شاید هم مطبوع یعنی طبیعی و در هستی طبع شده و لذا قابل دیدن است، گرچه هر بیننده‌ای نتواند ببیند ولی به هر حال دیدنی است.

---

[13] سورهٔ تکاثر(۱۰۲) همهٔ آیه‌ها: ۱-۸

[14] سورهٔ اسری(۱۷) قسمتی از ابتدایِ آیهٔ ۹

ریاضی قسمتی از زبانِ بیان

این فرآیند نیز باید در مورد بیانهایِ بینِ ما نیز رعایت گردد تا بیان، بیان(روشن و شفاف) باشـد. هنگامیکـه بیانهایِ ما با عددهایی همراه می‌گردد و سپس با بیانِ روابطی بینِ آن عددها ادامه می‌یابد، اصطلاحاً می‌گوییم با زبانِ ریاضی بیان می‌کنیم. این کار اخیراً معـروف شـده اسـت بـه الگوسازیِ(مدلسـازیِ) ریاضـی. ولـی در ادامـه می‌خواهیم کمی بیشتر به آنچه رخ داده است بپردازیم؟

اتفاق خاصی رخ نداده است! بلکه وقتی ما با هم با زبان مادری بیانی داریم، کلمه‌ها و عباراتِ ساخته شده بـا آنهاست که بیان ما را برای یکدیگر می‌سازند. در آنجا هم می‌توانستیم بگوییم که داریم بیانِ خود را با کلمه‌هـا و عبارت‌هایِ زبان مادری الگوسازی می‌کنیم. این الگوسازی شاید همان اِنزال باشد که قرآن می‌گوید. یـک چیـزی دیده شده است و یک بیانی با یک زبانی از آنچه دیده شده، در حال صورت پذیرفتن است که به آن **انزال** گفته می‌شود تا قابل بیان به دیگری گردد.

پس ریاضی چیزی نیست جز کلماتی جدید و اضافه بر زبان هـایِ مشـترکِ دیگرمـان بـرای گفتگـو دربـارۀ چیزهایی که دیده‌اند و می‌بینیم. به همین دلیل است که باید مراقبت نمود تا ایـن **کلماتِ حسـابِ اعـداد** یـا همان **الگوهای ریاضی،** بخوبی مشترک شوند تا هر بیانِ ساخته شده با آنها، **بیان** باشد.

فرآیند اصلی که از دیدن تا حسابِ اعداد پیش می‌رود را قرآن بسادگی بیان نموده است. همین‌جا باید یادآور گردم که بدلیل بکارنگرفتنِ درستِ همین روند، بعضاً دچار خطاهای فاحشی می‌شویم که باعث بروز اظهاراتی که بیان نیستند، می‌گردد.

این فرآیند دو مرحله دارد اول اینکه فرمود: «اَللهُ یَعلم ما تَحمل کلُ اُنثی و ما تَغیضُ الاَرحام و ما تَزداد **و کُل شیئٍ عندهُ بِمِقدار**»[15] پس هر چیزی نزدِ او(که همه چیز را بی کم و کاست می‌داند) بـا **مقدار(پیمانه)** اسـت. سپس در جایی دیگر فرمود: «یدبر الامر من السماء الی الارض ثم یعرج الیه فی یوم کان مقداره الـف سـنه ممـا تعدون»[16] ... در مرحله‌ای که پیمانه‌اش هزار سالی است که شـما مـی‌شـمارید. یعنـی مقدار(پیمانـۀ) آن از رویِ چیزی گفته شد که برای ما معین بوده و پیشتر می‌شناختیم. سپس گفته شد که شما آنرا **می‌شمارید** که ایـن

[15] سورۀ رعد(۱۳) آیۀ ۸

[16] سورۀ سجده(۳۲) آیۀ ۵

یعنی اساس، شمردنِ با همان پیمانه است و حاصل مثلاً برای آن مورد خاص یک عدد است بنـامِ هـزار! انتهـای سورهٔ جن نیز بیان نمود که و اَحصی کلَ شیئٍ عدداً که یعنی هر چیزی را برآورد نموده است بصورت عددی.

پس آموزاند که چنانچه می‌خواهید چیزی را بصورت عددی برآورد نموده و بیانِ عـددی نماییـد بایـد ابتـدا پیمانه‌ای را برایِ آن مشخص نموده و سپس بر حسب آن پیمانه، بشمارید و عددی را اعـلام نماییـد. در همـین مرحلهٔ آخر است که شما می بینید که آنچه می‌خواهید عددی برایش بیان کنید لازم است پیشتر، دیدنی داشته باشید که حاصلِ آن دیدن، شمارش و نهایتاً یک عدد است. این فرآیند شاید همـان ارتبـاطِ فیزیـک و ریاضـیات است.

همین‌جا معلوم می‌شود که تا چه اندازه، بیان‌هایِ ریاضیِ درست، بر اندازه‌گیریِ درسـت بنـا شـده اسـت!! و دیدیم که اندازه‌گیریِ درست هم تا چه اندازه به گزارشی راست از دیدنِ ما استوار است!!!

اما استفادهٔ **باطل(نادرست)** از الگوهایِ ریاضیِ موجود، می‌تواند ما را براحتی منحرف کند! و باعث گردد که بیان‌های باطل(نادرست) بدست آید. این استفادهٔ نادرست دقیقاً مانند استفادهٔ نادرست از زبان‌هـای دیگـر اسـت. لذا شگفت‌زده نشوید، همانگونه که می‌شود با زبانِ مادری دروغ گفت، منحرف نمود و فریب داد یا اشتباهاً باطلی را بیان(نما) کرد، با زبان ریاضی نیز می‌شود چنین نمود.

بسیاری از این انحرافات موقعی رخ داده‌اند که انسان نخواسته توجـه کنـد و یـا فرامـوش نمـوده اسـت کـه **بصیرتِ او کامل نیست**!!! او چیزها را آنگونه که هستند و تمامِ حقِ مربوط به آنهـا را نمـی‌بینـد بلکـه همـواره تیزبین‌تر، ممکن است مگر پیامی خدایی و مگر بیانی از طرفِ تیزبین‌ترین! نتیجهٔ این بی توجهی این است که او به خود اجازه می‌دهد تا قاعده‌های کلی بدهد و حرفهای گُنده گُنده بزند و نسبت‌های ناروا ایجاد کند. بسیاری از آنچه بنام قانون در فیزیک مرسوم گردیده و سپس بعد از مدتی قانونِ دیگری آمده و آنـرا نقـض کـرده اسـت از همین سر منشأ بوده است و گرنه نقضی هم صورت نمی‌پذیرفت و انحرافی هم رخ نمی‌داد و راه علـم گشـوده‌تـر گشته و سرعتِ آن نیز بسیار بیشتر می‌گشت!

مگر اینکه این قانون‌ها بعنوان فرضیه‌هایی با کمال تواضع و در محدودهٔ دیدنِ خودشان با تمـامِ قیـد دیـدنِ مربوطه اظهار گردند. که در این‌صورت بسیار بعید است که موجباتِ انحرافِ فکری و علمی گردند.

همین‌جا آشکار می‌شود که تا چه اندازه، آدمی برای نیل به علوم، که عموماً مربوط به قوانین و نظاماتِ حاکم بر عالَم(سیستم)ها هستند، نیازمندِ وحیِ از جانب خدا است. پر واضح است که تنها اوست که بر همه چیز بینایِ

کامل است و بینشِ او بالایِ بینشِ همه، حتی تیزبین‌ترینِ انسان‌هاست. بشنوید از قرآن که چه زیبا راهنمایی می‌کند: لا تدرکه الابصار و هو یدرک الابصار و هو اللطیف الخبیر[۱۷]. لذا **فقط اوست** که مجاز است **قانون** اعلام کند! که فعلاً از این مهم بگذریم!

و اما پس چه شده است که .... ؟! برای این منظور با مثالی پیش رویم. فرض کنید در مشاهداتی که به عالَمی(سیستمی، سامانه‌ای) داشته‌اید و در آن عالَم آیه‌ای را مورد توجه دارید که نتایج آن در موردِ دو چیز که شما به آن توجه داشته‌اید، جدولی شده است. این جدول کاملاً بطور دقیق از علمی که شما دارید حکایت می‌کند، البته بهمراهِ شرحی که شما از چگونگیِ مشاهده‌تان می‌آورید. اما پس از کمی توجه و تفکر **می‌بینید،** ستونِ دوم همواره ۳ برابرِ ستون اول بدست آمده است. حال به سرعت یک عبارت ریاضی(حسابِ عددی) بصورتِ روبرو می‌نویسید: $y = 3x$. این عبارتی که نوشته‌اید چه معنایی دارد؟

آیا شما منظورتان این است که : اولاً در مشاهده‌های من بترتیب هر آنچه در ستونِ اول و دوم بدست آورده‌ام را x و y بنامید. ثانیاً من تحت شرایطِ "فلان" دیده‌ام که هر بار y سه برابرِ x بوده است؟

یا آیا منظورتان این است که : اولاً هر مشاهدهٔ من که انجام داده و یا ممکن است بعداً نیز تحتِ شرایطِ "فلان" تکرار کنم را بترتیب برای ستونِ اول و دوم x و y بنامید. ثانیاً همواره y سه برابرِ x بدست آمده و خواهد آمد؟

یا آیا منظورتان این است که : اولاً هر مشاهدهٔ من و یا هر کسِ دیگری که انجام گرفته و یا ممکن است بعداً نیز تحتِ شرایط "فلان" تکرار گردد را بترتیب برای ستونِ اول و دوم x و y بنامید. ثانیاً همواره y سه برابرِ x بدست آمده و خواهد آمد؟

ملاحظه کنید که یک عبارتِ سادهٔ $y = 3x$ چه تعابیرِ گوناگونی می‌تواند داشته باشد! همهٔ این گوناگونی از اینجاست که ما توجه نداریم که ریاضی **فقط** قسمتی از زبانِ ما برای بیانِ حق یا بیانِ باطل است!

که اگر عمداً بیانِ باطل می‌کنیم پس راست نگفته‌ایم و اگر غیرِ عمدی و از رویِ غفلت باشد که مرتکب خطا شده‌ایم.

---

[۱۷] سورهٔ انعام(۶) آیهٔ ۱۰۴

به این ترتیب توجه کنید که بسیاری از عباراتِ ریاضی که از چیزی گفتگو می‌کنند بدونِ پیش‌فرضهایِ لازمِ مربوط به دیده و مشاهدهٔ من و شما و یا گوینده، غیرِ قابل ارزشگذاری‌اند یعنی نه می‌توان گفت درست‌اند و نه می‌توان گفت نادرست‌اند و لذا هیچ علمی و دانشی را بیان نمی‌کنند. گاهی، برخی آنقدر ریاضی‌زده شده‌اند(در واقع به دلیل ضعفی که در ریاضیات داشته‌اند همواره یک حس کوچکی در مقابلِ آن دارند) که متاسفانه کافی است، کسی، کمی ریاضی بیان کند آنگاه می‌گویند او علمی، حرف زد! و اگر در بیان خود، نیازی به ریاضیات نداشته و از ریاضی استفاده نکند اصولاً آن را علمی نمی‌انگارند!

برگردیم به مثالِ بالا: بهرحال پر واضح است که فقط و فقط اگر شما منظورتان همان اولی باشد، حق و درست گفته‌اید و در موارد دیگر شما خواسته یا ناخواسته به وادیِ باطل درغلطیده‌اید!

چرا بدنبال قانون هستیم؟

شاید یک علاقه‌ای در ما وجود دارد که می‌خواهیم اظهاراتی مشابهِ دومی و سومی داشته باشیم، راستی چرا؟

این باز می‌گردد به دو موضوعِ اساسیِ به هم گره‌خورده در هستیِ آسمانها و زمین که به زیبایی هر چه تمام به دقت در آیهٔ ×اَلَم تَروا اَن الله سخرلکم ما فی‌السموات و ما فی‌الارض و اَسبغ علیکم نِعَمَهُ ظاهره و باطنه و مِن الناس مَن یُجادل فی‌الله بِغَیر علمٍ و لا هدیً و لا کتابٍ منیرٍ×[18] ، آمده است. **تسخیرِ هر آنچه در آسمانها و زمین است توسطِ خداوند برایِ ما** انسانها که مخاطبینِ آن هستیم، موضوعی است که مکرراً در قرآن آمده است. خداوند به همه چیز در آسمانها و زمین مِهار زده است برای ما !!! درحالیکه نعمتهای فراوانِ آشکار و پنهانش را نیز به ما ارزانی داشته است.

سپس در جای دیگر پس از برشماری برخی از آن نعمت‌های فراوان بحث را بیشتر شرح داد که: ×**لتستووا** علی ظهوره ثم تذکروا نعمت ربکم اذا استویتم علیه و تقولوا سبحان الذی **سخرلنا هذا** و ما کنا له **مقرنین**× و انا الی ربنا لمنقلبون×[19]

آری همه برایِ آن است که شما بر پشتِ آنها تکیه زنید و سپس یادآرید نعمتِ پروردگارتان را هرگاه که بر آنها تکیه می‌زنید درحالیکه می‌گویید منزه است او که رام کرد برایِ ما که ما جمع‌آورندهٔ آنها نیز نبودیم.

[18] سورهٔ لقمان(۳۱) آیهٔ ۲۰

[19] سورهٔ زخرف(۴۳) آیه‌های ۱۳-۱۴

ما، آری ما بدنبالِ تکیه زدن بر نعمت‌های خداوند که رام کرده است برایِ ما، هستیم. در راستایِ این تکیه زدن بر پشت‌هاست که ما چگونگیِ مهارها را یافته تا با کنارِ هم گذاریِ مناسبِ آنها(قرین کردن) به هر چه بهرهٔ بهتر از نعمت‌هایِ او برسیم. بر اساسِ همین ویژگیِ از طرف خداوند است که آدمی یک نگاهِ ویژه‌ای به تمامِ عالَم‌ها دارد. این نگاه همان نگاهِ تکیه بر پشتِ مهارهایِ زده شده توسط خداوند است برایِ نعمت یا نعمت‌ها. دنبالِ پشت‌هایی برایِ تکیه است تا به نعمتی برسد. لذاست که در نگاهِ خود به یک عالَم، تکیه‌گاه‌هایِ احتمالی(ورودی‌ها) و نعمت‌هایِ احتمالی(خروجی‌ها) را جستجو می‌کند. در واقع قرآن می‌آموزد که آدمی نیست که مهار می‌کند بلکه آدمی فقط از گوشه‌ای از مهارهایِ موجود، آرام آرام توسطِ خداوند آگاهی یافته(یعنی تا حدودی با نگاهِ ورودی – خروجی از عالَم‌ها، علم یافته) و به این ترتیب با کنارِ هم چیدنِ مناسبِ آنها آشنا شده و سعی می‌کند تا به نعمتی برسد.

آنهایی را که امید دارد بتواند تکیه زده و وارد کند، ورودی، و آنهایی را که امید دارد بتواند بدست آورد و برایِ خود بصورتِ نعمتی خارج کند، خروجی می‌نامد. این نامگذاری‌ها نیز همگی به همین امید انجام می‌گردد. لذاست که تأکید می‌گردد که این تعابیرِ ورودی و یا خروجی که به هر چیزی در عالَم‌ها(سامانه‌ها) نسبت می‌دهیم، ناشی از نگاهِ بالایِ ماست. به این ترتیب است که کاملاً فطری است که چیزی را در یک نگاه، ورودی و در نگاه دیگر، خروجی بگیریم و یا بر عکس. در این‌جا فقط خواستیم حکمتِ این تعابیرِ ورودی و خروجی را که در ادامه، بسیار در بیان‌مان خواهیم آورد را بخوبی بیان کرده باشیم.

در واقع همهٔ انسانها امیدوارند، **قانون**ی برای تسخیر یافته تا بکارگیرند. هر چند که در همان آیهٔ بالا شنیدید که خداوند این تسخیر را نگذارده تا فقط تکیه زده شود. بلکه بسیاری موارد دیگر است که باید بدنبالِ تکیه زدن رخ دهد. هر بار که بر مهاری از مهارهایِ او تکیه می‌زنیم، لازم است تا یادآورِ نعمتِ او گردیم و زبانِ حال‌مان این باشد که بگوییم، پاک و منزه است کسی که این را مهار زد برایِ ما که در غیر اینصورت حتی مونتاژکار آن نیز نبودیم. و این درحالی است که بی‌تردید ما بسوی پروردگارمان از انقلاب‌کنندگانیم. که هر یک از این فرازهایِ واجب، شرحِ مبسوطی می‌بطلبد که در اینجا وارد نمی‌شویم.

در بالاتر گفتیم دو موضوعِ اساسی به هم گره‌خورده ولی تا اینجا به نظر می‌رسد که فقط یک موضوع را گفته‌ایم! نکتهٔ بسیار بسیار اساسیِ دیگر که در آیه آمده ولی ما ظاهراً بسادگی از آن گذشته و پافشاری نکردیم این است که : این همه، یعنی همهٔ این تسخیرها توسطِ یگانه‌ای صورت می‌گیرید و از پراکندگی و ناهمگونی و

بی‌ارتباطی و در یک جمله بی‌حکمتی، مبرا و منزه است. سرِ همهٔ این مهارهایِ ظاهراً گوناگون، همه و همـه، بـه دستِ اوست و شما تحتِ حکومتِ اوست که اختیاراتِ موقتی‌ای می‌یابید.

درست است که باد، فرشتگانِ مأموری دارد، درست است که آتش، خورشید، ماه، زمین و بـاران و ... همگـی فرشتگانِ ویژهٔ خود دارند ولی همه و همه در صف‌اند و دقیقاً مأموریتِ محوله از فرشتهٔ بالاتر را بی کم و کاسـت اجرا می‌کنند و نیز همهٔ والاترین فرشتگان نیز هر آنچه دارند از آنِ اوست که والاترین است. این نگاهِ توحیدی به عالَم‌ها که در کلمهٔ زیبا و سادهٔ رب‌العالمین نیز بارها و بارها تکرار می‌کنیم، اساسِ رفتارِ علمیِ دانشـمندان را در طولِ تاریخ بشر شکل داده است.

بارها و بارها قرآن شماتت می‌کند که چرا شما برایِ هر عالَمی، رب و الهی خاص قـرار مـی‌دهیـد و خـود را گمراه ساخته‌اید و تأکید می‌کند که الهِ شما همگی الهی یگانه است. این‌هایی که شما می‌بینید درست است کـه ظاهری مجزا و شاید گاهاً ظاهری با ورودی‌های گوناگون دارند ولی بدانید کـه ایـن‌هـا هیچکـدام الـهِ شـما کـه بخواهید تصور کنید که هر کدام یک الهی مجزا هستند، نیست، بلکه این‌ها در یک نظـامِ بـه هـم تنیـدهٔ بسـیار مفصل که شما هم در آنید، تحتِ حاکمیتِ واحدی قرار دارند(که این پایه‌ای‌ترین، علم است).

توجه کنید که هرگز دانشمندانِ واقعی بویژه پس از بعثت رسول اکرم(ص) و گسترش معـارف اسـلامی کـه عمدهٔ آن توحید بوده است، حاضر نیستند تجربیات خود را به سر منشأهایِ جدا از هم و گوناگون نسبت دهنـد! اگر فرض می‌کنند که قانونی کشف کرده‌اند، آنرا به همهٔ بینش‌ها(تجربه‌ها)یِ خود تسـری مـی‌دهنـد و چنانچـه حتی یکی از آنها را نتواند توجیه کند، به آنچه قانون تلقی کرده بودند شک می‌کنند. این حال همان حالی است که می‌گوییم توحیدی است و یعنی بدنبالِ وحدتِ نظر است.

پس دقت کنید که اصولاً این ویژگیِ ما که به دنبالِ قانونی هستیم که در تمام شرایط تسری دهیم و توجیه کنندهٔ تمامیِ مشاهدات‌مان باشد و تخطی ناپذیر باشد و در واقع قانون باشـد، خـود نشـانهٔ سرشـتِ یگانـه‌گـرایِ (فطرتِ توحیدیِ) ماست.

مثالِ بسیار معروف، همان عباراتی است که توسط عده‌ای به عنوانِ قانون‌های نیـوتن بیـان گردیـد و حـدودِ چند صد سال حاکمیتی مطلق داشت یعنی انتظار داشتند که حکمت همه چیز از آن قابـل اسـتنتاج باشـد. امـا بسادگیِ هر چه تمام، با ناتوانی در توجیهِ چند بینشِ ساده‌ای که دانشمندانی در مورد نور داشتند، به هم ریخته شد. همین روند تکاملی بود که نظریه‌هایِ نوی از جمله کوانتومیِ نور و نسبیت عام و خاص شکل گرفتند.

لذا چنانچه ارتباطاتی را در محدوده‌ای یافتید هرگز نباید تصور کنید که خدایی را یافته‌اید بلکه به قسمتی بسیار جزئی از روابط(حکمت‌ها)، دست یافته‌اید و هنوز با همهٔ آنچه بشر می‌تواند دست یابد نیز فاصلهٔ جدی دارید. لذاست که قرآن به آنها آیه‌ای از آیاتِ خدا نام می‌دهد.

چگونه دروغ نگوییم؟

حال اگر قرار باشد بر پایهٔ همین دیده‌های خود، **قاعده**‌ای در موردِ این تسخیرها استنتاج کنیم، باید چه بگوییم که نادرست نبوده و دروغ القا نکرده باشیم؟

آنچه ما می‌خواهیم این است که با تکرارِ مشاهده‌ای، نتایجِ یکسانی بدست آید اما این لزومی ندارد چرا که بینشِ ما بهرحال نقص دارد. برای گفتنِ حرفی صادقانه و در عین حال بدونِ کم و کاست کافی است، اظهارِ ما همواره شامل هر دو قسمت باشد:

همهٔ آنچه هم‌اکنون می‌دانیم = آن قسمت که دانسته‌ایم + آن قسمت که هنوز نمی‌دانیم

= حقیقت آنچه دیده‌ایم+ این حقیقت که هنوز نمی‌دانیم چه چیزهایِ دیگری خواهیم دید که این همان است که از ذکر نعمت و آن حالی که در بالا گفته شد، ناشی می‌گردد.

این بصورتِ ریاضی نیز قابل انجام است.

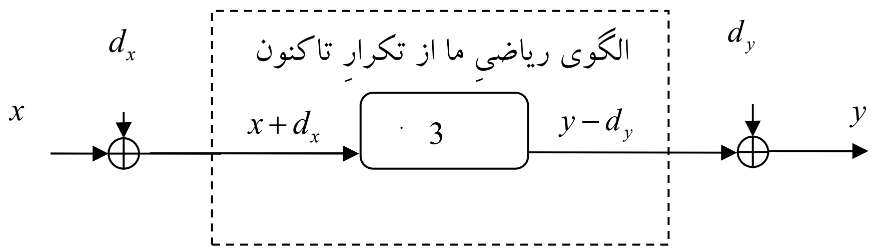
الگویِ علمِ ما از آن عالَم

الگوی علمِ ما از آن عالَم به شرطِ تکرارِ مشیت الهی

الگویِ علمِ ما از اثرِ عدمِ تکرارِ مشیت الهی در آن عالَم روی الگوی بالا

شکل ۱

برای مثالِ بالا، بسادگی چنین می‌توان الگوسازی نمود: $(y-d_y)=3(x+d_x)$ که برایِ تاکنون که دانسته‌ایم، dها صفراند، و برای از این پس dها می‌توانند هر چیزی باشند! . این بیانِ ریاضی را می‌توان بصورتِ نمایشِ بلوکیِ زیر نیز نشان داد.



شکل ۲

تکرار یعنی چه؟ و الگوهایِ آماری چرا بوجود آمدند؟

اما لازم است دربارهٔ تکراری بودنِ مشاهده نیز توضیحات بسیار مهم داد. چرا که مفهومِ تکرار نیز باید بخوبی از پیش مشترک شده باشد تا در بیانی که داشته‌ایم، استفاده گردد.

تکرار هنگامی مطرح است که همهٔ آنچه در مشاهدهٔ ما دیده می‌شوند را لحاظ کنیم. فرض کنید در مشاهده‌ای ۵ چیز هستند که شما می‌بینید. اگر ۳ چیز از این ۵ تا عیناً در مشاهدهٔ دیگر، همان باشند که قبلاً بوده‌اند، آنگاه می‌گوییم این مشاهده نسبت به این ۳ تا تکراری است. اما آیا می‌توان با قاطعیت گفت که فقط نسبت به آن ۲ تا غیرتکراری است؟! . چنین اظهاری مستلزم این است که یقین داشته باشید که مابقی از این ۵تا که حتی شما ندیده‌اید، نیز، هیچکدام تغییر نکرده باشند. پس ما با توجه به آنچه نمی‌بینیم، حتماً نمی‌توانیم بگوییم که تکراری است به این معنی که جز آن ۲تا، همه چیز تکرار شده‌اند درحالیکه خود به خوبی توجه داریم که ما به جز آن دوتا، فقط ۳تایِ دیگر را توجه و مراقبت داشته‌ایم که تکرار شده باشند. پس اساساً تکراریِ حقیقی ادعایی است که ما نمی‌توانیم داشته باشیم. لذا بهتر است حتی در صورت بالا نیز تکراری‌نما گفته شود.

پس معلوم می‌گردد که در مثال بالا منظورمان از تکرار(نما) این بوده که بجز آن دو چیز(x,y) ، بقیهٔ آنچه در مشاهدهٔ ما قرار دارند(آن ۳تایِ دیگر) لازم است که تغییری نداشته باشند. در واقع مشاهداتِ ما علم‌هایی درست کرده‌اند نزدِ ما. وقتی ما این علم‌ها را کنار هم گذارده و به همهٔ آنها نگاه می‌کنیم در واقع خود را در یک نگاهِ والاتری قرار داده و لابد به دنبالِ دیدنی هستیم که دربردارندهٔ همهٔ آنها باشد. به این دیدِ جدید از آن دیدن‌ها که حال خود علمی است حاصل از آن علوم، اصطلاحاً استنتاج گویند. معمولاً همین‌جاست که شما قاعده و قانونی را در این تکرار دنبال می‌کنید که بیابید.

حال چنانچه بیانِ شما از این قانونِ عددی بازایِ هر مشاهده، برایِ هر چیزی از مشاهداتتان، در بردارندهٔ فقط و فقط یک عددِ معین و قاطع باشد، بطور کلی گفته می‌شود که شما با الگوی ریاضیِ مربوط به عددهایِ قطعی یا معین(*deterministic*) سخن می‌گویید. برعکس چنانچه این بیان برای هر یک چیز، شاملِ مجموعه‌ای از پاسخ‌های عددیِ ممکن باشد، بطور کلی گفته می‌شود شما با الگویِ ریاضیِ اعدادِ غیر قطعی(غیر معین) سخن می‌گویید. آنچه باعثِ زاییده شدنِ الگوهایِ ریاضی‌ای بنامِ الگوهای آماری(*statistic*) یا تصادفی(*stochastic*) در مقابلِ قطعی گردیده، همین است و این نباید با موضوعِ الگوسازیِ "قسمتِ نمی‌دانیم" که در بالاتر با dها انجام گردید، عوضی گرفته شود که این دو، دو منشأ مجزا دارند. البته باید اذعان داشت که آنکه مجبور شده است به الگویِ آماری دست یازد، حتماً پذیرفته است که تکراری که او در نظر گرفته است، تکرارِ حقیقی نبوده است وگرنه که نمی‌بایست نتایج از منظرِ او، تکرار نگردد. و معلوم می‌گردد حداقل یکی از نادیده‌هایِ او که باید دیده می‌شد، تکرار نشده است که حالا نتیجه‌اش این شده که تکرار واقع نشده است. از منظرِ تو، خدا نخواسته است که تکرار رخ دهد. پس چون خدا نیز بی‌حکمت مشیت نمی‌کند، چیزی بوده است که تو ندیده‌ای تا بتوانی حکمتش را دریابی! در چنین حالی دو راه وجود دارد. یکی اینکه تن به پذیرفتن تغییر بدهی و سراغِ حکمتِ تغییر بگردی و آن را برطرف کنی! و یا اصرار بر تکراری بودن نکنی و سراغِ الگویی دیگر با نگاهِ تغییری رفته و سعی کنی با آن نگاه بیانی بدست آوری.

راه دیگر این است که بر تکرار به عنوانِ تکرار حقیقی، اصرار ورزی و یا بخواهی بگویی که این تغییرات را نمی‌خواهم حکمت‌اش را بدانم و فقط می‌خواهم بگونه‌ای گزارش کنم و مثلاً آماری از آن گزارش می‌کنم و آنچه رخ داده را نامِ تصادف و شانس(بی‌حکمت) می‌دهم. هر چند این نام‌گذاری کاملاً بی‌انصافی است ولی متاسفانه رایج شده است.

بیایید در همان مثالِ بالا مشاهدات خود را بازای یک x ثابتِ 2 ، مرتباً تکرار نماییم یعنی این بار در تعریفِ تکرارنما، x را نیز آورده‌ایم و نسبت به x نیز تکرار می‌کنیم. حال اگر y نیز همواره مقداری ثابت بدست آید مثلاً 6 ، آنگاه برای اعلامِ نتایجِ مشاهداتِ تاکنونِ خود، می‌توانید الگوی ریاضیِ سادهٔ تساوی را بکار گرفته و بنویسید: $y = 6$.

اما اگر این نتایج برای مشاهداتِ تکراریِ شما همواره یکسان نماند و شما قصد داشته باشید این گوناگونیِ پاسخ را که از منظرِ شما غیر منتظره است و شما اصرار به نگاهِ تکرارِ حقیقی دارید، بگونه‌ای بیان کنید، راههایی وجود دارد. توجه کنید، اگر در یک جدولی تمامیِ اعدادِ بدست آمده را بیاورید. این طرز بیان هنوز معین است چون شما می‌گویید مشاهدهٔ شمارهٔ ۱، عددِ 6.1 و مشاهدهٔ شمارهٔ ۲ عددِ 5.8 و ... را نتیجه داده‌اند و اصرار به تکرار حقیقی نداشته‌اید چرا که مشاهدات را با شماره‌شان متمایز نموده‌اید. حقیقت این است که شما هنوز هیچ قاعده‌ای و سخنی دربارهٔ تکرار نیافته‌اید و لذا فقط نایکسانی‌ایی را که انتظار نداشته‌اید گزارش می‌کنید. اما اگر بخواهید این گوناگونیِ پاسخ را با حفظ نگاهِ تکرار حقیقی، به هر حال بصورتی بیان کنید، راههای دیگری نیز وجود دارد که بیانِ آماری، یکی از اینهاست که مقدمهٔ بیانِ الگویِ تصادفی است. در چنین صورتی بیانِ شما فرق خواهد داشت. مثلاً می‌گویید خروجی دارای متوسطِ 6 بوده و پراکندگیِ آن 0.4 است. اینجا شما برای خروجی، یک عدد معین معرفی نکرده بلکه پیشاپیش القا می‌کنید که خروجی در بازه‌ای از اعداد قرار داشته است و چون ذکرِ شمارهٔ مشاهده را عمداً کنار گذارده‌اید(چون اصرار به حفظِ نگاهِ تکرار حقیقی دارید!)، حال از مجموعه‌ای از پاسخ‌ها سخن می‌گویید و لذا وضعیتِ آماریِ مشاهداتتان را بیان می‌کنید. ولی دقت کنید که در اینجا نیز نمی‌گویید نمی‌دانم بلکه به صراحت می‌گویید می‌دانم که آمار چنین بوده است و تکرار **حقیقی** نبوده است اما بهتر است بگوییم فعلاً موضوع را **نادیده** می‌گیرید.

لذا همانگونه که الگوهای معین از نتایجِ مشاهداتِ مکرر، گفتگو می‌کنند، الگوهایِ آماری(و تصادفی) نیز از نتایجِ مشاهداتِ مکرر گفتگو می‌کنند. با این تفاوت که در معین، خروجی‌ها نمی‌توانند بازای مشاهداتِ مکرر، متفاوت باشند ولی در آماری و یا تصادفی، این امکان را بوجود آورده‌ایم.

از همین‌جاست که در این الگوهایِ ریاضی، بجای یک پاسخِ یگانه برایِ مشاهداتِ مکرر، گفتگو از یک **مجموعهٔ پاسخ‌ها** است.

یک الگوی ریاضیِ معین کمک می‌کند تا شما نیازی به بیانِ تکراری نتایج مورد نظر خود نداشته باشید. به این ترتیب که بازایِ تکرارِ داده شده‌ای دقیقاً نتیجه یا نتایج را تعیین می‌کند و در واقع مدعی است که هربار هم این مشاهده را تکرار کرده‌اند همین پاسخ را گرفته‌اند.

الگوهای ریاضیِ آماری(یا تصادفی) نیز قصدشان همین است که شما را بی‌نیاز از بیانِ تکراری کنند. اما اینجا با دادنِ مثلاً یک پاسخِ معین بعنوانِ نتیجهٔ یک تکرار، نمی‌توانند کار را تمام کنند. چرا که اصولاً یک مجموعهٔ پاسخ‌های **گوناگون**ی رخ‌داده‌اند. لذا سعی می‌گردد دربارهٔ **الگویِ گوناگونی**، بیانی داشته باشند. در آنجا گوناگونی‌ای نیست تا الگویی برای بیان‌اش نیاز باشد ولی **در اینجا چون گوناگونی وجود دارد و از طرفی نمی‌خواهیم فعلاً به آن بپردازیم و فرضِ تکرارِ حقیقی‌مان را بهم بریزیم و درعین حال می‌خواهیم که گوناگونی به نوعی گزارش شود، سعی بر این خواهد بود که الگویی برای آن گوناگونی، پیشنهاد گردد تا در بیان استفاده گردد.**

الگوسازی و شناسایی

ابتدا فراموش نکنید که بوجود آمدنِ الگوهایِ ریاضیِ گوناگون بسیار مشابهِ بوجود آمدنِ کلماتِ گوناگون و یا عباراتِ گوناگون در زبانِ بیانِ ماست. با این تأکید که هرگاه شما در بینشِ خود با **اعداد** نیز سر و کار پیدا می‌کنید و این بینشِ شما که نزدتان علمی شده را می‌خواهید بیان کنید، کلمات و عباراتی پدید می‌آید. این‌ها را نامِ ریاضی می‌دهید. این کلماتِ خاصِ ریاضی را الگوهایِ ریاضی می‌نامند.

فرآیندِ شکل‌گیریِ این الگوها مانندِ همان کلماتِ زبان است و شاید شرح دقیقِ این تحول و تکامل برای هر یک از آنها چندان هم ساده نباشد. اعداد خود شاید ابتدایی‌ترین الگوهایِ ریاضی بوده‌اند که از عملِ عاد کردن(شمردن) نتیجه شده‌اند. بعد از آن شاید جمع، از بنیادی‌ترین الگوهای ریاضی است. به آسانی می‌توان نشان داد که الگوهایِ دیگر از جمله ضرب و تفریق و تقسیم نیز چنانچه ما را با آنها در دوران ابتدایی آشنا ساخته‌اند، از جمع ساخته شده‌اند. در واقع همانگونه که با کلماتی چون آب و نان و بابا و مادر و ... رسماً در درسی بنامِ زبانِ فارسی آشنا می‌شدیم، با الگوهایی نظیرِ اعداد و جمع و غیره نیز در درسی بنامِ حساب رسماً آشنا شدیم. همانگونه که برایِ گفتنِ اینکه **یک سیب و سیبِ دیگری** در دستم بردارم و بیاورم، یاد گرفتم که بگوییم **دو سیب** بردار و بیاور، به همان ترتیب یاد گرفتم که به جایِ اینکه یک جدولِ مفصلِ دو ستونِ با

بی‌شمار ردیف از اعداد، رسم کنم تا نشان دهم که ستونِ دوم رابطه‌اش با ستونِ اول به ترتیبی است که در جدول آمده، ستونِ اول و دوم هر یک را نامی(x, y) می‌دهم و سپس فقط می‌نویسم: yRx و یا به گونه‌های روبرو نمایش می‌دهم: $x \to [R] \to y \quad , \quad x \xrightarrow{R} y$. آنگاه انتظار دارم که همه، همان منظورِ بالا را درک کنند. بعد وقتی به نوعی خاص از رابطه که همان تصور ورودی-خروجی مرا به شکلی خاص می‌خواهد القا کند، اشاره دارم، از الگویِ(کلمهٔ) دیگری به نامِ تابع استفاده نموده و این بار به گونه‌ای دیگر می‌نویسم: $y = f(x)$ و یا نمایش می‌دهم: $x \to [f] \to y$ در تمامی این مراحل در حال بیان قسمتی از علمِ خود هستم، دربارهٔ عالَمی.

الگوهایِ ریاضیِ دیگر که شما با آنها آشنا شده و یا خواهید شد، نیز همگی با چنین فرآیندی برای بر طرف نمودنِ نیازهایِ متعددِ بیانی شما از عالَم‌هایِ تحت نظر و مطالعهٔ شما بوجود آمده‌اند. الگویی که هم‌اکنون آن را با نامِ تغییری(دیفرانسیلی) و یا جمعی(انتگرالی) می‌شناسید، الگویِ رنگی(طیفی، فوریه‌ای، لاپلاسی) یا الگویِ فضایِ برداری و یا الگوهایِ آماری و مشهور به تصادفی(اتفاقی) در مقابلِ الگوهایِ معین و قطعیِ ریاضی و یا الگویِ فازی، همه و همه در همین فرآیندِ تکاملِ زبان برایِ بیان، بوجود می‌آیند.

همانگونه که از کلمات، هنگامی می‌توان در بیان استفاده نمود که ابتدا مبین باشند یعنی بیان‌شده و روشن شده باشند و در واقع بین گوینده و شنونده مشترک شده باشند، الگوهایِ ریاضی هم چنین‌اند. پس حتماً برایِ مبین شدنِ یک الگویی که می‌خواهید آنرا در بیان‌تان بکار برید باید زحمتِ لازم را بکشید. این زحمت بطور خلاصه شاملِ **چگونگیِ رسیدن شما از تجربه(بینش)تان تا به این الگو، در بیان است.** البته پر واضح است که در این میان، شما، فقط حق دارید از الگوهایِ مبینِ قبلی استفاده کنید تا این الگویِ جدید را وارد الگوهایِ مبین کنید.

یکی از چیزهایی که بسیار مورد غفلت است، همین رابطهٔ بینشِ شما تا الگو است، یعنی همین مبین شدن! در واقع غفلت از دقت در این قسمتِ بسیار مهم موجب می‌گردد که بسیار حرفهایی حتی به زبان ریاضی به یکدیگر بزنیم که طرفین مطلبی را در واقع **بیان** نمی‌کنند بلکه یکدیگر را به غلط و اشتباه در مورد خودشان می‌اندازند. مثالِ عنب و ازوم و انگور از مثالهایِ بسیار خوب است که برایِ گوشزد همین مهم بوده است. مثلاً الگویِ فضای برداری یک کلمه است که خود شاملِ کلماتی جزئی‌تر است. اگر کسی از این کلمه(الگو) می‌خواهد استفاده کند حتماً باید اجزایی از بینشِ خود را به ترتیبی کاملاً منطقی بر این کلمات، یک به یک، منطبق نموده سپس اجازه می‌یابد تا از این الگو در بیانش استفاده کند. این منطق نیز همان منطقی است که با آن، این الگو

مبین شده است. در واقع باید بینشِ خود را به فضای برداری، ابتدا سوار کند و سپس این مرکب و سوارش را براند و سوارکاری کند. کسی می‌تواند این سوار کردن را بخوبی و درستی انجام دهد و حقِ آنرا بجا آورد که از روندِ مبین شدنِ(از بینش تا بیانِ) مربوط به الگویِ فضای برداری به دقت آگاه باشد. این سوار کردنِ بینش‌تان به یک الگویِ از پیش‌معین، معروف شده است به **شناسایی!**

شاید به این دلیل باشد که این کار، در روندِ دست‌یابی به بینشِ بهتر و یعنی شناختِ بیشترِ آن آیه است که صورت می‌پذیرد. به عنوان مثال وقتی بینشی عددی را در جدولی عددی جا می‌دهید، به نوعی در حال افزایش شناخت و ساده‌سازیِ مفهوم دیده شده برایِ خودتان یا دیگرانید. حال اگر همین جدول را سعی می‌کنید به صورت تابعی شناخته شده، درآورید، در واقع دارید سعی می‌کنید مفهومِ تابع بودنِ چیزی از بینش خودتان به چیزی دیگر در آن را نسبت دهید. در واقع آن الگویِ خاص(در اینجا تابع)، مفهومی دربردارد که به طرزی ساده‌تر نیز در آن گنجانده شده است و من امیدوارم که با برازش دادنِ بینش‌ام به آن الگو بتوانم از همهٔ آن مواهبی که آن الگو در اختیار می‌گذارد، بهره‌مند گردم. این همان چیزی است که بالاتر، نام‌اش را سوارکاری گذاشتیم.

و اما بطور خلاصه می‌توان اینگونه جمع‌بندی نمود که ما یک بینشی در یک سطحی داریم. در روندِ عمق بخشیدن به همین بینش، این دل است که شروع می‌کند به تفکر و پردازش‌های گوناگون. در همین روند است که از یکی از الگوهایِ موجودی که پیشتر شناخته است، کمک می‌گیرد. درست است که آن برایِ بیانی از یک بینش بالایی از یک آیهٔ دیگری بوده است، ولی امید است که شاید بتوان از همان الگو در اینجا نیز استفاده نمود. و این کار سودش این است که هر آنچه بینش است که در آن بیان، پیشتر به بینشی خاص، مترتب بوده است، حال به این بینشِ ابتدایی داده شده و دفعتاً بینشِ سطحیِ موجود به بینشی در حد بالاتری ارتقا می‌یابد. این عملیات کارهای دل است برایِ شناخت بیشتر و بهتر که نامِ شناسایی نیز شاید به همین دلیل است.

حال چنانچه دقت کنید، گویا ما همواره با دو موضوع مواجه‌ایم. یکی ساخته شدنِ الگوهایِ جدیدی در بیان‌مان به خاطرِ بینش‌هایِ جدیدی که نیاز به بیان دارند ولی ما هنوز برایِ بیانِ آنها الگویی مناسب در اختیار نداریم و لذا آفرینشِ الگویی نو در دستور کار قرار می‌گیرد. دیگری، استفادهٔ درست و به حق از الگوهایِ از پیش‌ساخته شده(مبین) است برایِ بیانِ بینش‌هایی که نیاز به بیان دارند و الگوهای موجود را نیز کافی دانسته و نیازی به الگویِ جدید نمی‌بینیم. در واقع در قسمت اخیر هر چند آفرینشِ اولیهٔ الگو با بینشِ دیگری صورت پذیرفته ولی فکر می‌کنیم که می‌توانیم بینش فعلی را نیز بر آن سوار کنیم. اما در حالت اول چون فکر می‌کنیم

بینشِ جدید قابل سوار کردن به هیچیک از الگوهایِ پیشین نیست برایِ آن، الگویی جدید آفریده می‌شود. همین بده و بستان و رفت و آمد، بینِ تکاملِ بینش‌ها و زبانِ مبین‌ها است که بیّنه‌ها را می‌سازد. لذا بیان، همین فرآیندِ تکاملی است که آموزگاری می‌خواهد و آموزنده‌ای که آمورزگارش رحمن است و آموزنده‌اش انسان که فرمود ×علمه‌البیان× .

به این ترتیب از چینشِ به جایِ مبین‌ها(الگوهایِ پیش‌ساخته)، آیهٔ بینه‌ای نازل می‌گردد و این نازله خود یک بینه است. قرآن وقتی به عالَم(سامانه، سیستم)ی توجه می‌کند، و به نگاهِ ویژه‌ای از آن می‌پردازد، آن را یک آیه(نشانه) می‌خواند. برایِ نمونه توجه کنید: × و من ایاته خلق السموات و الارض و ما بث فیهما من دابه و هو علی جمعهم اذا یشاء قدیر×[۲۰] عالَمی که اینجا، در نظر گرفته شده است، آسمانها و زمین و آنچه از جنبندگان در آن‌دو پراکنده شده‌اند، است. اما آنچه به عنوان آیه‌ای از آیاتِ او یادآور گشته است، **آفرینشِ** این عالَم است، بحثِ **خلقِ** آنهاست. یعنی اگر موضوعِ خلقتِ آنها را بگیرید و دنبال کنید به او می‌رسید، خلقت، خود، نشانه و آیه است و البته ضمناً می‌گوید که این، همهٔ آیات نیست و فقط آیه‌ای از آیات است.

آیات درونِ یک آیه

پس ما هم در نگاه‌مان به یک عالَم، بسته به آن نگاهِ ویژه‌ای که داریم، آیه‌ای از آیاتِ موجود در آن عالَم را می‌توانیم توجه کنیم. اما قرآن بارها و بارها تأکید دارد که همین آیه‌ای که توجه می‌دهد، خود شاملِ آیاتی دیگر است ولی نه برایِ همه بلکه برایِ یک افرادی خاص! به عنوان نمونه ملاحظه کنید:× و من ایاته الجوار فی‌البحر کالاعلام× ان یشاء یسکنِ الریح فیظللن رواکد علی ظهره ان فی ذلک لایات لکل صبار شکور×[۲۱] ابتدا به آیه‌ای توجه می‌دهد: جریان‌دارانِ در دریا و در عینِ حال امکانِ راکد شدن‌شان در همان دریاست. سپس به صراحت می‌گوید در همان آیه حتماً آیاتی است برایِ هر صبار و شکوری. یعنی حال اگر با یک ویژگی‌هایی اضافی، هر کسی به آن آیه بنگرد آن را مشتمل از آیاتی خواهد یافت.

روشن است که این نگاه، تأکید دارد که هر عالَمی می‌تواند از چیدمانِ درستِ (به حقِ) عالَم‌های متعدد دیگری سامان یافته باشد. حال هنگامی که شما به آیه‌ای در آن عالَمِ مفصل‌تر توجه داده می‌شوید، این آیه می‌تواند به آیه‌هایِ مفصلی که هر یک مربوط به نگاهی خاص از عالَم‌های تشکیل دهنده برمی‌گردد، با یک

[۲۰] سورهٔ شوری(۴۲) آیهٔ ۲۹

[۲۱] سورهٔ شوری(۴۲) آیهٔ ۳۲-۳۳

نظمی دقیق مربوط باشد. حال اگر آیه‌ای به این ترتیب توسطِ آیاتِ دیگر بیان گردد، گفته می‌شود که تفصیل داده شده است. پر واضح است که این بیانِ تفصیلی، شاملِ بیّنه‌هایِ مربوط به هر یک از آن آیات است که با دقت کنار هم چیده شده‌اند.

هر گاه ما قرینه‌سازی‌هایی از عالَم‌هایی را کنار هم و با حساب و کتابی درست انجام می‌دهیم(عالَم‌هایی را به هم مونتاژ(هم‌بست) می‌کنیم، یعنی به هم می‌بندیم) تا عالَمی بدست آید، در واقع امید داریم، هر یک از آن عالَم‌ها بصورتِ آیه‌ای خاص ظاهر گردند و سپس از کنار هم قرارگیریِ آن آیه‌ها، آیهٔ خاصی از عالَمِ مفصل‌تر دیده شود. حال، هر کس که این هم‌بست را با همین آگاهیِ کامل از چگونگیِ هم‌بست ببیند، آنگاه، از آیه‌های جزئی‌تر و چگونگی ارتباطاتشان نیز بخوبی آگاه است و می‌تواند بیانِ مفصلی از آن عالَمِ مفصل داشته باشد. این‌کاری که او می‌کند و بیّنه‌های همهٔ آیاتِ مربوطه را به درستی می‌چیند تا یک تفصیلی از بیّنه‌ها بدست دهد، را اصطلاحاً الگوسازیِ آن عالَمِ مفصل بوسیلهٔ الگوهایِ آیه‌هایِ جزئیِ تشکیل دهنده، می‌گویند.

این در شرایطی بود که ما به عالَمی که حداقل به مراحلی از مونتاژِ آن نظارتی و لذا بصیرتی داشته‌ایم، پرداخته‌ایم و می‌خواهیم علمی از آن را که در محدودهٔ همان حاصل است و حالا نزد ما هست، بیان کنیم. اگر اساساً چنین نظارتی هم در کار نبوده باشد و ما دفعتاً با عالَمی مواجه‌ایم، داستان چگونه می‌شود؟ . در این مواجهه می‌توان سعی نمود، آیهٔ مورد نظرِ خود را به آیاتی که پیشتر می‌شناسیم، عالَم به عالَم مربوط سازیم و به بیانی بر اساسِ بیّنهٔ هر یک از آنها برسیم. در این روش درست است که ما نظارتی بر مونتاژ نداشته‌ایم ولی سعی داریم آن را چیدمانی ببینیم بر اساسِ آیه‌هایی از عالَم‌هایی که قبلاً علمی از آنها نزدِ خود داریم. به این کار نیز می‌گویند الگوسازی ولی در روندِ مهندسیِ معکوس.

سپس هر عالَمی از آن عالَمِ تحتِ نظارت را که توانستیم با چنین نگاهی ببینیم، آنگاه می‌توانیم مشابهِ بالا، با بینه‌هایِ مربوطهٔ هر کدام از آیه‌هایِ از پیش آشنا، آن را تفصیلاً بیان کنیم که این دوباره همان الگوسازی است. فرقِ این با قبلی در این است که در این‌جا ما هیچ نقشی در هم‌بست، نداشته‌ایم تا بر اساسِ نقشی که داشته‌ایم، مفصلاً بیانی کنیم. بلکه لازم است از رویِ محصولِ نهایی که هیچ نقشی هم در آن نداشته‌ایم، ابتدا بصورتِ همبست‌هایی که خودمان از آن تصوراتی داریم و از آنها الگوهایی داریم، تصور کنیم و سپس بر اساسِ آنها، علمی و سپس بیانی مفصل داشته باشیم.

روندِ معکوسِ ما همواره محدود به علمی است که از پیش، نزدِ ما هست. حال، چنانچه آیه‌ای در میان باشد که پیشتر به آن نپرداخته‌ایم و لذا نسبت به آن علمی هم نداریم، یا در این روندِ معکوس، عاجز می‌شویم، یا به

اشتباه در می‌افتیم و متوجه نیز نمی‌شویم. چنانچه عاجز شویم، آنگاه است که این عجز می‌تواند ما را به آیه‌ای جدید از آیاتِ او رهنمون سازد و کشفی برایِ ما رخ دهد. در واقع ما در روندِ معکوس سعی داریم با قالب‌هایِ از پیش‌معینِ نزدِ خود، کار را توجیه کنیم و این معلوم نیست که لزوماً پاسخگو باشد. بویژه هنگامی‌که با عالَمی مواجهیم که هنوز دستِ انسانِ دیگری در آن دخالتی نداشته و نابِ ناب، کارِ دستِ فرشتگانِ اوست، یعنی تقریباً همهٔ هستی به جز آن عالَم‌هایی که مشهور شده به اینکه می‌گویند فنّآوریِ بشر در آن است.

نگاهِ لطیف و نگاهِ خبیر

اینکه سعی می‌کنیم به عالَمی بصورتِ متشکل از عالَم‌هایی بنگریم و یا در یک آیه‌ای سعی می‌کنیم آیاتِ متعددی ببینیم، قرآن به آن نگاهِ لطیف می‌گوید. یعنی سعی در این است که تا جاییکه می‌توان، بینش را با نرمی و لطافت هر چه بیشتر داشت و درونی‌تر دید و روابط بینِ آن درونی‌ترین‌ها را نیز دریافته و دید.

حال هنگامی که نخواهید چنین نموده بلکه بخواهید همین آیه را در همین کلیتش و با همان نگاهی که دارید، فقط نازل نموده و بیان کنید. این نگاه، نگاهِ خبیر است. یعنی فقط می‌خواهد از خودِ این آیه، بطورِ کلی خبری دهد و نه بطورِ لطیف و جزئی. پس لابد برایِ او در این نگاه، اهمیتی ندارد که چگونه و از ترکیب چه آیاتی این آیه پدیدار است، بلکه خودِ آیه و چگونگیِ آن به تنهایی مد نظر است.

برای نمونه در مثال بالا، آیهٔ اصلی اشاره دارد به چند موردِ کلی ۱) جریانِ قایق‌هایِ بادبان‌دار در دریا ۲) مشیت خدا به سکونِ باد ۳) نتیجهٔ سکون باد که راکد شدنِ قایق‌ها بر پشت دریا است. این آیه بطور کلی و ظاهری به این توجه می‌دهد که مشیتِ خدا بر باد، موجب جریان و یا توقف در دریاست برای قایق‌های بادبانی. اما اگر کسی بخواهد شکلِ بادبان و قایق را به سرعتِ قایق ربط دهد و یا راجع به شکل‌گیریِ مشیت خدا بر باد و سکونِ آن و یا برعکس بپردازد و یا بخواهد به نوعِ جنس بادبان‌ها و ساختمانِ آنها و جزئیاتِ نصب و همینطور در مورد خودِ قایق بپردازد و خلاصه هر آنچه به آن مشیت و سکون و جریان و راکد شدنِ بر پشت دریا مربوط است، بپردازد، حتماً آیه‌های متنوع و متعددِ دیگری را ملاحظه خواهد نمود. در چنین لطافت‌نگری هر چه لطیف‌تر، بیان نیز مفصل‌تر!

مرورِ الگوی فضای برداری برایِ هر یک از آنچه در بالا آمدند

الگویِ فضای برداری از جابجایی در طول و عرض(پهنا، آنچه عمود بر طول است) و سپس وسعت یافتن(گسترش) در زمین و آسمان و عددی کردنِ آن، آرام آرام، شکل گرفته است. این از نمونه‌های بارزِ تعلیمِ بیان است که توسطِ خداوند صورت پذیرفته است و به این ترتیب بوده است که این الگویِ ریاضی، ساختارِ کنونیِ خود را یافته است.

حال اگر شما وقتی به آیه‌ای دیگر از آیات الهی(بجز جابجاییِ در طول و عرض) توجه می‌کنید، فکر کنید که شاید بتوانید این آیه را نیز با کمکِ این الگو بیان کنید! ، در چنین تفکری، شما سعی دارید نگاهِ خاصی را که الگویِ فضایِ برداری القا می‌کند، به این آیه نیز سوار کنید. در واقع سعی دارید ببینید، آیا می‌توان با این الگو به آن آیه نیز نگاه نمود. به عنوانِ نمونه بشنوید این آیات را که همگی در توجه دادنِ به مختلف بودنِ رنگها در عالَم‌هایِ گوناگون، مشترکند: ×و من ایاته خلق السموات و الارض واختلاف السنتکم و الوانکم ان فی ذلک لایاتٍ للعالمین×[22] ، و سخر لکم اللیل و النهار و الشمس و القمر و النجوم مسخراتٍ بامره ان فی ذلک لایات لقوم یعقلون× و ما ذرا لکم فی الارض مختلفا الوانه ان فی ذلک لایه لقوم یذکرون×[23] ، ثم کلی من کل الثمرات فاسلکی سبل ربک ذللا یخرج من بطونها شرابٌ مختلفٌ الوانه فیه شفاء للناس ان فی ذلک لایه لقوم یتفکرون×[24] ، الم تر ان الله انزل من السماء ماء فاخرجنا به ثمرات مخلتفا الوانها و من الجبال جدد بیض و حمر مختلف الوانها و غرابیب سود× و من الناس و الدواب و الانعام مختلف الوانه کذلک انما یخشی الله من عباده العلمؤا ان الله عزیز غفور×[25] ، ×الم تر ان الله انزل من السماء ماء فسلکه ینابیع فی الارض ثم یخرج به زرعاً مختلفاً الوانه ثم یهیج فتریه مصفراً ثم یجعله حطاماً ان فی ذلک لذکری لاولی الالباب×[26]

هنگامی که سعی می‌کنید آیهٔ رنگ‌هایِ مختلف را به الگویِ ریاضیِ فضای برداری سوار کنید و در واقع سعی دارید که ببینید آیا می‌توانید اختلافِ رنگها را نیز با این الگو بیان کنید، در واقع در حالِ شناساییِ بیشتر و بیشترِ این آیه هستید و یا بعبارتی، سعی دارید بوسیلهٔ الگوی فضای برداری، شناختی از آیهٔ مختلف بودنِ رنگ‌ها بنمایانید. چرا که اگر بتوانید چنین کنید، گویی حال همهٔ آنچه در مورد الگویِ فضای برداری دارید، می‌توانید به این آیه نیز بار کنید. و هر آنچه در الگوی فضای برداری موجب شناختِ بیشترِ شماست، حال می‌تواند در خدمتِ

[22] سورهٔ روم(۳۰) آیهٔ ۲۲
[23] سورهٔ نحل(۱۶) آیهٔ ۱۲-۱۳
[24] سورهٔ نحل(۱۶) آیهٔ ۶۹
[25] سورهٔ فاطر(۳۵) آیهٔ ۲۷-۲۸
[26] سورهٔ زمر(۳۹) آیهٔ ۲۱

این آیه نیز قرار گیرد. در واقع آن الگو یک نوع نگرشی را در بردارد که هر آنچه را به آن سوار می‌کنید، موجب می‌شود، با آن نگرشِ خاص به آن آیه نگریسته شود. یا بعبارت دیگر به شما دربارهٔ این آیه، آن نگرش را القا می‌کند.

حال اگر مثلاً فرمان یک خودرو را در نظر گرفته و بخواهید در مورد فرمان و فرآیندِ جابجاییِ خودرو، چیزی به زبان ریاضی بیان کنید، ممکن است تصمیم بگیرید ابتدا اجزایِ آن را تک تک بوسیلهٔ الگویِ فضای برداری بیان نموده و سپس این الگوها را به درستی کنار هم چیده و یک بیانِ مفصلی از چگونگیِ جابجایی در فرمان تا چرخ‌ها بدست آورید. این کار را می‌گویند الگوسازیِ ریاضیِ عالَمِ فرمان تا چرخ‌ها با آیهٔ جابجایی. روشن است که در این فرآیند چون شما از بیانِ تک تکِ اجزایِ سامانه، پیش‌تر شناخت دارید و مطمئن هستید که خواهید توانست هر یک را بیان کنید مطمئن هستید که می‌توانید کل را نیز بیان کنید. این البته به الگویی، لطیف نیز، منجر می‌گردد.

اما فرض کنید نگذارند که شما اجزا را دسترسی داشته باشید و یا ممکن نباشد و فقط شما دسترسی به ورودی و خروجی دارید و آنها را می‌توانید ببینید. آنگاه سعی می‌کنید از شناختِ خود برای این کل نیز خبری بیان کنید. در اینجا عموماً نگاهی خبیری دارید. سپس شروع می‌کنید به سوار کردنِ شناخت ابتداییِ خود (که عبارتست از نتایج آزمایشاتِ گوناگونِ خود را که در جدولی بیان نموده‌اید) به یک الگویِ ریاضیِ از پیش‌معین. این کار را نیز می‌گوییم شناسایی! که این البته به الگویی خبیر(ورودی- خروجی) منجر خواهد گشت.

سؤال: در درس مدار چه می‌کردیم؟!

تا وقتی فقط نگاه می‌کنیم و علائمی(سیگنال‌هایی) از چیزها دریافت می‌کنیم و اصطلاحاً می‌بینیم، ولی بدنبالِ حکمتی در میان آنها نیستیم، نگاهی عالَمی(سیستمی) نداریم. به محضِ اینکه پس از دیدن بدنبالِ حکمتِ بینِ آنها می‌گردیم، حال اصطلاحاً نگاهی عالَمی(سیستمی) داریم. آنها را سعی داریم یک عالَم(سیستم) ببینیم. در واقع بدنبال آن هستیم که ببینیم آیا چیزی آنها را به هم محکم کرده است. یا شاید بهتر بگویم، مطمئنیم که آنها حتماً به هم محکم‌اند ولی نمی‌دانیم چگونه. حُکمِ فی مابین را نمی‌دانیم و علاقمندیم حُکم را بدانیم. لذا در نظر می‌گیریم که رابطه‌ای بین آن علائم(سیگنال‌ها) هست.

تعریفِ رابطه در ریاضی بر این پایه بوده است. البته نامگذاری‌های گوناگون نیز رویِ هر یک از این سیگنال‌ها حسبِ نگرشِ خودمان می‌توان داشت. همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، می‌توان به تعدادی نامِ ورودی یا خروجی و یا هر چیز دیگر داد که بستگی به نگاهِ ما دارد. بیانِ این روابط بِینی همان بیانِ نگاه سیستمی ماست که وقتی با اعدادِ مربوطه بیان گردد، ریاضی بیان شده است. اینجاست که نگاهِ سیستمیِ شما با الگویِ ریاضیِ سیستمی بیان می‌شود. لذاست که در الگوهایِ سیستمی از چگونگیِ روابط، گفتگو می‌شود.

دو نگاه به سیگنال‌ها بوده است که منجر به دو بیان از سیستم‌ها نیز شده است. این دو نگاه و جزئیات مربوط به هر یک در سیگنال‌ها و سپس چگونگیِ ایجاد بیان مربوطه در سیستم‌ها برایِ هر یک، عمدهٔ بحث این درس خواهند بود. این دو نگاه یکی نگاه به تغییراتِ سیگنال‌ها در مشاهداتِ تکرارنماست و دیگری نگاه به رنگِ آنها در یک کلان‌مشاهدهٔ متشکل از آن مشاهدات است. در اولی تغییرِ سیگنال از یک مشاهده به مشاهدهٔ بعدی مورد توجه است، درحالیکه در نگاهِ رنگی تمامیِ این مشاهدات و تغییراتِ دیده شده در آنها، یکجا و یکپارچه و یک واحد دیده شده و یک رنگ(جنس) خاصی تلقی می‌شوند. لذا در اولی گفته می‌شود که سیگنال‌ها اینگونه و آنگونه تغییر کرده‌اند و در دومی گفته می‌شود سیگنال‌ها چنین رنگ و چنان رنگ داشته‌اند.

نگاهِ تغییری

در بسیاری از موارد است که ما از یک مشاهده به مشاهدهٔ دیگرمان در چیزهایی که در یک عالَم به آنها توجه داریم، تغییری می‌بینیم. در واقع هر مشاهده‌ای غیر از مشاهدهٔ دیگر است و لذا ذاتاً از تغییر گفتگو داریم، هر چند لابد تکرارنمایی هم در کار است. لذا یکی از آنها که در هر مشاهده‌مان مطمئن هستیم که حتماً نسبت به مشاهده‌هایِ دیگر تغییر کرده است، می‌تواند به عنوانِ اندیس و یا شناسهٔ هر مشاهده در نظر گرفته شود. در ادامه ممکن است الگوسازیِ ریاضیِ شما پیش رفته و چنانچه مشاهدات اجازه دهند، تغییراتِ بقیه را تابعی از همین شناسه در نظر بگیرید که در این صورت اخیر اصطلاحاً به دومی متغیرِ مستقل و به اولی تابعِ آن گویند. که این اجازه همانگونه که همگی آموخته‌اید یعنی در هر مقداری از متغیرِ مستقل، متغیرِ تابع، فقط و فقط یک مقدار توانسته داشته باشد.

در بسیاری از نگاه‌هایِ مکررِ ما به برخی از عالَم‌ها، وضعیتِ نسبیِ زمین و خورشید تغییر می‌کند. این تغییر به عدد بیان شده(مانند یک شبانه روز و تقسیماتِ ریزِ آن) و نامی گرفته است به نامِ زمان! البته هم‌اکنون دانشمندان، تغییرهایِ دیگری را به عنوان زمان تعریف کرده‌اند که به دستگاههایی که این تغییرات را

ثبت(مشاهده) نموده و گزارش می‌کنند، اصطلاحاً ساعت‌های اتمی گفته می‌شود. بحث زمان بحث شیرینی است که از حوصلهٔ اینجا خارج است(مقالهٔ ...).

آنقدر بیانِ یک سیگنال بصورتِ متغیرِ تابعی از زمان در ما نفوذ کرده که وقتی کسی می‌گوید سیگنالِ x ، همه بی‌اختیار به یادِ $x(t)$ می‌افتند. اینکه القا شود یک تغییراتی در مشاهدات بوده است و این تغییرات، متناظر با تغییرِ چیزی به نام زمان نیز می‌تواند بیان شود، البته بسیار بجاست. می‌خواهم بگویم اصولاً نوشتنِ $x(t)$ به تنهایی، از نگاهِ تغییری حکایت می‌کند.

باید همین‌جا با صراحت گفت که البته و صد البته لازم نیست در نگاه‌مان همواره زمانِ مصطلح، متغیرِ مستقل قلمداد گردد، بلکه سیگنالِ مورد نظر ما می‌تواند تابعی از متغیرِ دیگری نیز دیده شود. مثلاً در یک عکسِ سیاه و سفیدِ دارایِ 307200 خانه در یک ماتریسِ 640 در 480، می‌تواند مقدارِ رنگِ هر خانه(y)، سیگنالِ متغیرِ تابع دیده شود از متغیرِ شمارهٔ خانه(p). حال چنانچه متغیرِ شمارهٔ ستون(n 640تا) را در نظر بگیرید آنگاه هر ستون، 480 مقدارِ رنگ(y) به خود می‌گیرد که پر واضح است که حال اینها تابعی از هر ستون نمی‌توانند در نظر گرفته شوند. خوب ببینید که این الگوهایِ ریاضی به نوعِ نگرشِ شما بستگی دارد. اما در همهٔ آنها نگاه ما به تغییری در هر مشاهده است و حتماً مشاهداتِ تکرارنمایی در کاراند. در واقع در مشاهداتمان چیزها، تغییر می‌کنند. در اولی $y(p)$ که معلوم است در هر مشاهده، ما یک خانه را دیده‌ایم و به ترتیب جلو آمده و لذا در هر مشاهده یک رنگِ تغییر یافته از دیگری دیده‌ایم و به این ترتیب y نیز تک مقداری است. در دومی $y(n)$ ، هر بار به یک ستون از خانه‌ها نگاه کرده‌ایم و سپس به ستونِ بعدی و به همین ترتیب. لذا هر بار نیز تغییری در مشاهدات دیده‌ایم اما این بار، علی‌الحساب، تغییراتِ مشاهده شده قابل بیان با یک عدد نبوده بلکه با 480 عدد لازم است که بیان گردد و لذا در اینجا y تک مقداری نبوده بلکه باید با یک آرایهٔ 480تایی بیان شود. البته ممکن است کسی در دومی تغییرات را در متوسطِ رنگِ هر ستون خلاصه نموده و تک مقداری کند. البته حال می‌تواند متوسطِ رنگِ هر ستون را تابعِ شمارهٔ ستون بگیرد.

نگاهِ رنگی

حال بیایید در همان مثالِ بالا یکجا تمامِ خانه‌ها را دفعتاً در یک مشاهده ببینیم و نه اینکه تک تک دیدنِ خانه‌ها برایِ ما مطرح باشد. آنگاه می‌توان گفت که باز هم سیگنالی دیده‌ایم ولی این بار از تغییر گفتگو نکرده و دفعتاً می‌گوییم این سیگنال عبارتست از فلان. یعنی ناگهان آنچه اندیس و شناسهٔ تغییر در مشاهدات

بود را برداشته و حذف می‌کنیم و می‌گوییم این سیگنال این رنگ است و نه اینکه بگوییم تغییراتش بازایِ هر خانه اینگونه بوده است. از تغییرات نمی‌گوییم بلکه از یک نام و جنس برایِ کل استفاده می‌شود.

برای ریاضی کردنِ این داستان و این نگاه، عموماً از الگویِ ریاضیِ فضایِ برداری استفاده می‌شود. ابتدا رنگهای خاصی را به عنوانِ پایهٔ رنگ‌ها تعریف می‌کنیم. سپس هر رنگِ دلخواه را می‌بینیم که از ترکیبِ چگونهٔ آن رنگ‌هایِ پایه بدست می‌آید. آنگاه می‌گوییم آن رنگ عبارتست از رنگِ مرکب از رنگ‌هایِ اصلی بترتیبِ فلان!

در اینجا می‌گوییم رنگ و طیفِ سیگنال این‌گونه است درحالیکه در آنجا می‌گفتیم تغییراتِ سیگنال بازایِ تغییرِ مشاهده آن‌گونه است. در اینجا صحبت از یک رنگ برایِ سیگنال در یک نگاه است درحالیکه در آنجا از تغییرِ آن در طی مشاهداتِ متوالی حرف می‌زنیم.

درس دوم

زمان و فرکانس

تا وقتی فقط نگاه می‌کنیم و علائمی(سیگنال‌هایی) از چیزها دریافت می‌کنیم و اصطلاحاً می‌بینیم، ولی بدنبالِ حکمتی در میان آنها نیستیم، نگاهی عالَمی(سیستمی) نداریم. به محضِ اینکه پس از دیدن بدنبالِ حکمتِ بینِ آنها می‌گردیم، حال اصطلاحاً نگاهی عالَمی(سیستمی) داریم. آنها را سعی داریم یک عالَم(سیستم) ببینیم. در واقع بدنبال آن هستیم که ببینیم آیا چیزی آنها را به هم محکم کرده است. یا شاید بهتر بگویم، مطمئنیم که آنها حتماً به هم محکم‌اند ولی نمی‌دانیم چگونه. حُکمِ فی مابین را نمی‌دانیم و علاقمندیم حُکم را بدانیم. لذا در نظر می‌گیریم که رابطه‌ای بین آن علائم(سیگنال‌ها) هست.

تعریفِ رابطه در ریاضی بر این پایه بوده است. البته نامگذاری‌های گوناگون نیز رویِ هر یک از این سیگنال‌ها حسبِ نگرشِ خودمان می‌توان داشت. همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، می‌توان به تعدادی نامِ ورودی یا خروجی و یا هر چیز دیگر داد که بستگی به نگاهِ ما دارد. بیانِ این روابط بِینی همان بیانِ نگاه سیستمی ماست که وقتی با اعدادِ مربوطه بیان گردد، ریاضی بیان شده است. اینجاست که نگاهِ سیستمیِ شما با الگویِ ریاضیِ سیستمی بیان می‌شود. لذاست که در الگوهایِ سیستمی از چگونگیِ روابط، گفتگو می‌شود.

دو نگاه به سیگنال‌ها بوده است که منجر به دو بیان از سیستم‌ها نیز شده است. این دو نگاه و جزئیات مربوط به هر یک در سیگنال‌ها و سپس چگونگیِ ایجاد بیان مربوطه در سیستم‌ها برایِ هر یک، عمدهٔ بحث این درس خواهند بود. این دو نگاه یکی نگاه به تغییراتِ سیگنال‌ها در مشاهداتِ تکرارنماست و دیگری نگاه به رنگِ آنها در یک کلان‌مشاهدهٔ متشکل از آن مشاهدات است. در اولی تغییرِ سیگنال از یک مشاهده به مشاهدهٔ بعدی مورد توجه است، درحالیکه در نگاهِ رنگی تمامیِ این مشاهدات و تغییراتِ دیده شده در آنها، یکجا و یکپارچه و یک واحد دیده شده و یک رنگِ(جنس) خاصی تلقی می‌شوند. لذا در اولی گفته می‌شود که سیگنال‌ها اینگونه و آنگونه تغییر کرده‌اند و در دومی گفته می‌شود سیگنال‌ها چنین رنگ و چنان رنگ داشته‌اند.

نگاهِ تغییری

در بسیاری از موارد است که ما از یک مشاهده به مشاهدهٔ دیگرمان در چیزهایی که در یک عالَم به آنها توجه داریم، تغییری می‌بینیم. در واقع هر مشاهده‌ای غیر از مشاهدهٔ دیگر است و لذا ذاتاً از تغییر گفتگو داریم، هر چند لابد تکرارنمایی هم در کار است. لذا یکی از آنها که در هر مشاهده‌مان مطمئن هستیم که حتماً نسبت به مشاهده‌هایِ دیگر تغییر کرده است، می‌تواند به عنوانِ اندیس و یا شناسهٔ هر مشاهده در نظر گرفته شود. در ادامه ممکن است الگوسازیِ ریاضیِ شما پیش رفته و چنانچه مشاهدات اجازه دهند، تغییراتِ بقیه را تابعی از

همین شناسه در نظر بگیرید که در این صورتِ اخیر اصطلاحاً به دومی، متغیرِ مستقل، و به بقیه، تابعِ آن گویند. که این اجازه همانگونه که همگی آموخته‌اید یعنی در هر مقداری از متغیرِ مستقل، متغیرِ تابع، فقط و فقط یک مقدار توانسته داشته باشد.

در بسیاری از نگاه‌هایِ مکررِ ما به برخی از عالَم‌ها، وضعیتِ نسبیِ زمین و خورشید تغییر می‌کند. این تغییر به عدد بیان شده(مانند یک شبانه روز و تقسیماتِ ریزِ آن) و نامی گرفته است به نامِ زمان! و وقتی می‌خواهیم چیزهای دیگر در همان مشاهده‌مان را با آن اندیس‌گذاریم و یا شناسه دهیم و یا به اصطلاح ریاضی، متناظر کنیم، می‌گوییم: فلان چیز در زمانِ آن‌قدر، این‌قدر بوده است. یا می‌گوییم: در آن زمان، فلان چیز این قدر بوده است. یا می‌گویید بازایِ آن زمان، مقدارِ فلان چیز، این عدد بوده است. البته هم‌اکنون دانشمندان، تغییرهایِ دیگری را به عنوانِ زمان تعریف کرده‌اند که به دستگاه‌هایی که این تغییرات را ثبت(مشاهده) نموده و گزارش می‌کنند، اصطلاحاً ساعت‌های اتمی گفته می‌شود. بحثِ زمان بحث شیرینی است(به مقالهٔ پیوست در زمینهٔ زمان مراجعه گردد). اما به عنوان یک آموزه، این بحثِ بسیار بسیار مهم را می‌توان در یک جمله خلاصه نمود: زمان همان ظرفی است که متغیری را به متغیرِ دیگر نسبت می‌دهیم.

متأسفانه باید گفت که به دلیلِ فاصله افتادن از تعالیمِ قرآن و عترت در این زمینه نیز دانشمندان، دچار یک انحرافِ بزرگی شده‌اند. در قرآن و عترت اساساً همین تعبیرِ بالا بکار برده شده است درحالیکه، عموماً ما زمان را یک چیزِ مطلق گرفته و دربارهٔ آن گفتگو می‌کنیم. در قرآن یک چیزی قبل از چیزی دیگر یا بعدِ آن، مفهوم دارد یعنی قبل و بعد معنی دارد و اساساً ماجرا نسبی گرفته شده است.

آنقدر بیانِ یک سیگنال بصورتِ متغیرِ تابعی از زمان در ما نفوذ کرده که وقتی کسی می‌گوید سیگنالِ x ، همه بی‌اختیار به یادِ $x(t)$ می‌افتند. اینکه نوشتنِ $x(t)$، القا می‌کند که یک تغییراتی در مشاهدات بوده است و این تغییرات، متناظر با تغییرِ چیزی به نامِ زمان نیز می‌تواند بیان شود، البته بسیار بجاست. می‌خواهم بگویم اصولاً نوشتنِ $x(t)$ به تنهایی، از نگاهِ تغییری حکایت می‌کند.

باید همین‌جا با صراحت، همانگونه که در بالا نیز آمد، گفت که البته و صد البته لازم نیست در نگاه‌مان همواره زمانِ مصطلح، متغیرِ مستقل قلمداد گردد، بلکه سیگنالِ مورد نظر ما می‌تواند تابعی از متغیرِ دیگری نیز دیده شود. مثلاً در یک عکسِ سیاه و سفیدِ دارایِ 307200 خانه در یک ماتریسِ 640 در 480، می‌تواند مقدارِ رنگِ هر خانه(y)، سیگنالِ متغیرِ تابع دیده شود از متغیرِ شمارهٔ خانه: p (در اینجا p همان زمانِ متمایز کنندهٔ هر مشاهده از مشاهدهٔ دیگر است). حال چنانچه متغیرِ شمارهٔ ستون n (640 تا) را در نظر بگیرید آنگاه هر ستون،

480 مقدارِ رنگ(y) به خود می‌گیرد(در اینجا n همان زمانِ متمایز کنندهٔ هر مشاهده از مشاهدهٔ دیگر است و بازایِ هر زمان 480 عدد داریم). پر واضح است که حال اینها تابعی از هر ستون نمی‌توانند در نظر گرفته شوند. خوب ببینید که این الگوهایِ ریاضی به نوعِ نگرشِ شما بستگی دارد. اما در همهٔ آنها نگاه ما به تغییری در هر مشاهده است و حتماً مشاهداتِ تکرارنمایی در کاراند. در واقع در مشاهداتمان چیزها، تغییر می‌کنند. در اولی $y(p)$ که معلوم است در هر مشاهده، ما یک خانه را دیده‌ایم و به ترتیب جلو آمده و لذا در هر مشاهده یک رنگِ احتمالاً تغییر یافته از دیگری دیده‌ایم و به این ترتیب y نیز تک مقداری است. در دومی $y(n)$ ، هر بار به یک ستون از خانه‌ها نگاه کرده‌ایم و سپس به ستونِ بعدی و به همین ترتیب. لذا هر بار نیز احتمالاً تغییری در مشاهدات دیده‌ایم اما این بار، علی‌الحساب، تغییراتِ مشاهده شده قابل بیان با یک عدد نبوده بلکه 480 عدد لازم است و لذا در اینجا y تک مقداری نبوده بلکه باید با یک آرایهٔ 480تایی بیان شود. البته ممکن است کسی در دومی تغییرات را در متوسطِ رنگِ هر ستون خلاصه نموده و تک مقداری کند. البته حال می‌تواند متوسطِ رنگِ هر ستون را تابعِ شمارهٔ ستون بگیرد.

معمولاً زمان را با شمردنِ رخدادِ یک دوره، بیان می‌کنند. مثلاً در زمانِ مصطلح، آن را با یک دورهٔ طلوع و غروب تا طلوعِ بعدیِ خورشید، که نامِ "شبانه روز" داده‌اند، می‌شمارند. در زمان‌گذاریِ عملیاتِ یک رایانه، دوره‌ای که نهایتاً موجب می‌گردد، علامتی، یک بار صفر، سپس یک، و سپس دوباره صفر گردد، را می‌شمارند. هر عملیاتی در رایانه دارایِ چنین اندیسی از زمان است. در هر دوره نیز یک عمل صورت می‌پذیرد و یک عملیاتِ مفصلِ تشکیل شده از چندین عمل، لازم است که در چندین دوره صورت پذیرد. در مثالِ بالا نیز آنچه یک خانه را از خانهٔ دیگر متمایز می‌کند همان دوره‌ای است که رخ می‌دهد. در قرآن به این دوره که می‌تواند از نگاه‌هایِ گوناگون، گوناگون نیز باشد، یَوم گفته شده است. یوم در قرآن به معنایِ مرحله و دوره است. ملاحظه کنید این راهنماییِ قرآن را:❊ و یَستعجلونک بالعذابِ و لن یُخلف اللهُ وعدَه و اِنَّ یوماً عند ربک کاَلف سنه مما تَعُدُّون❊[۲۷]

نگاهِ رنگی

[۲۷] سورهٔ حج(۲۲) آیهٔ ۴۷ این آیه اشاره دارد به اینکه دورهٔ زمانی نزد پروردگار با آنچه هم‌اکنون ما می‌شماریم فرق دارد!

حال بیایید در همان مثالِ بالا یکجا تمامِ خانه‌ها را دفعتاً در یک مشاهده ببینیم و نه اینکه تک تک دیدنِ خانه‌ها برایِ ما مطرح باشد. آنگاه می‌توان گفت که باز هم سیگنالی دیده‌ایم ولی این بار از تغییر گفتگو نکرده و دفعتاً می‌گوییم این سیگنال عبارتست از فلان. یعنی ناگهان آنچه اندیس و شناسهٔ تغییر در مشاهدات بود را برداشته و حذف می‌کنیم و می‌گوییم این سیگنال این رنگ است و نه اینکه بگوییم تغییراتش بازایِ هر خانه اینگونه بوده است. از تغییرات نمی‌گوییم بلکه از یک نام و جنس برایِ کل استفاده می‌شود و مثلاً نامِ گلی یا شخصی و یا منظره‌ای داده می‌شود.

برای ریاضی کردنِ این داستان و این نگاه، عموماً از الگویِ ریاضیِ فضایِ برداری استفاده می‌شود. ابتدا رنگهای خاصی را به عنوانِ پایهٔ رنگ‌ها تعریف می‌کنیم. سپس هر رنگِ دلخواه را می‌بینیم که از ترکیبِ چگونهٔ آن رنگ‌هایِ پایه بدست می‌آید. آنگاه می‌گوییم آن رنگ عبارتست از رنگِ مرکب از رنگ‌هایِ اصلی بترتیبِ فلان!

در اینجا می‌گوییم رنگ و طیفِ سیگنال این‌گونه است درحالیکه در آنجا می‌گفتیم تغییراتِ سیگنال بازایِ تغییرِ اندیسِ مشاهده، آن‌گونه است. در اینجا صحبت از یک رنگ برایِ سیگنال در یک نگاه است درحالیکه در آنجا از چگونگیِ تغییرِ آن در طی مشاهداتِ متوالی حرف می‌زنیم.

دربارهٔ دو رنگِ بسیار ساده و مهمِ ضربه‌ای و دوره‌ای

یکی از ساده‌ترین رنگ‌ها که از رویِ خودِ سیگنالِ تغییری می‌توان ساخت، رنگ‌هایی هستند که در همه جا صفراند مگر در مشاهدهٔ k ام که واحدند! این رنگ‌ها را نامِ ضربه داده‌اند که اگر $\delta(n)$ را نمایشِ آن رنگی بگیریم که همه جا صفر است مگر در مشاهدهٔ صفرام، آنگاه $\delta(n-k)$ کدام است؟

برایِ زمان‌پیوسته این می‌شود پالسی که عرضِ آن رو به صفر است(یعنی هر چه بتوانیم آن را کوچکتر می‌کنیم) ولی چون می‌خواهد مساحتِ زیرِ آن، واحد بماند، ارتفاع‌اش رو به هر چه بزرگتر شدن می‌گذارد(اصطلاحاً می‌گویند به بی‌نهایت میل می‌کند) و نمایشِ آن نیز مانند بالا می‌شود: $\delta(t)$ و $\delta(t-\tau)$!

پرسش ۱: بیان سیگنال $x(n)$ را بر حسب رنگ‌های ضربه‌ای $\delta_k \,\square\, \delta(n-k)$ بنویسید. همینطور در پیوسته $x(t)$ را بر حسب رنگ‌های ضربه‌ای $\delta_\tau \,\square\, \delta(t-\tau)$ بنویسید.

چنانچه دقت کنید این رنگ‌هایِ ضربه‌ای، برایِ فضایِ بردارِیِ کلیهٔ سیگنال‌هایِ تغییریِ ممکن، یک پایه(دستگاه) محسوب می‌شوند. یعنی اولاً هیچیک را با ترکیبِ خطی از بقیه، نمی‌توان ساخت و ثانیاً هر سیگنالِ دلخواه(همه‌جا تعریف شده) را می‌توان با ترکیبِ خطیِ آنها ساخت. کاری هم که لازم بود انجام دهیم تا در هر سیگنالِ دلخواه، ببینیم، از هر رنگی چه وزنی وجود دارد، این بود که اصطلاحاً تصویر کنیم سیگنال را در هر رنگ تا وزنِ مربوطه را بیابیم یا به بیانِ عددی‌تر و ریاضی، لازم است سیگنالِ مربوطه را در تک تک رنگ‌ها ضربِ داخلی کنیم تا وزنِ مربوط به آن رنگ را بدست آوریم.

کاملاً توجه دارید که از این نوع پایه‌ها می‌توان متعدد و متنوع ساخت و نمونهٔ بالا، فقط ساده‌ترین و البته شاید پایه‌ای‌ترین پایه بود. خوب یکی از پایه‌های دیگر که از دیرباز خداوند در بسیاری از مخلوقاتِ خود به ما نشان داده است و تأکید نموده است که آنها را برایِ آموزشِ حسابِ اعداد نیز گذارده است، پایه‌هایی هستند که شاملِ "دور"اند و اصطلاحاً می‌گوییم از دوره‌ای برخوردارند یا بعبارتِ ساده‌تر از دوره‌ای به دورهٔ دیگر تکرار می‌گردند. بشنوید و سپس ببینید: ﴿هوالذی جَعَلَ الشمس ضیاءً و القمر نوراً و قَدَّره منازل لِتَعلموا عدد السنین و الحساب ما خَلَقَ اللهُ ذلک الا بالحق یُفصل الایاتِ لقومٍ یعلمون﴾[۲۸] از اولیه‌ترین محاسباتِ اساسی که توسط پیامبرانِ او به مردم آموزش داده شد، این بود که خداوند بوسیلهٔ ماه نسبتی را برایِ شما در آسمان رسم کرده و در دوره‌ای که نامِ ماه گرفته است، متناوباً به ما نشان می‌دهد. این نسبت هم‌اکنون معروف شده است به کسینوسِ ضریبی از شمارهٔ روز از اول هر ماه تا آخرِ آن! که پس از یک ماه دوباره تکرار می‌شود که می‌دانید و می‌دانیم که این از میلیون‌ها سال پیش، با دورهٔ ۲۹ یا ۳۰ روز در حال تناوب است.

حال شما نیز بیایید با این سیگنال‌ها، پایه‌ای بسازیم. روشن است که می‌شود: $\Phi_f = e^{j(2\pi f)n}$ ها[۲۹] که بازایِ f هایِ گوناگون، اعضایِ گوناگونِ پایه تعیین می‌شوند. در زمان‌پیوسته نیز می‌شود: $\Phi_f = e^{j(2\pi f)t}$ ها ! این رنگ‌ها را رنگ‌هایِ دوره‌ای یا فرکانسی می‌نامند.

---

[۲۸]سورهٔ یونس(۱۰) آیهٔ ۵

[۲۹]اینکه بجایِ نمایشِ حقیقیِ $\cos(\Omega n)$ و $\sin(\Omega n)$ از $e^{j\Omega n}$ استفاده شده است، دلیلِ بسیار زیبا و ساده کنندهٔ عملیاتِ ریاضی دارد. توجه کنید که با قبولِ زحمتِ عملیات ریاضی در حوزهٔ اعداد مختلط از زحمتِ محاسبه یک‌بار برایِ سینوس و یک‌بار هم جداگانه برایِ کسینوس و سپس جمعِ‌شان می‌رهیم. در واقع گویی با قبولِ زحمتِ محاسبات با اعداد مختلط، محاسباتِ جدا جدا و سپس جمعِ آنها را به محاسباتِ یکجا تبدیل می‌کنیم. در واقع شما بجایِ دو عبارتِ جداگانه محاسبه شدهٔ $a\cos(\Omega n)$ و $b\sin(\Omega n)$ ، $a, b \in R$ و سپس مثلاً تفاضلِ آنها بصورتِ

پرسش ۲: آیا قبول دارید که $e^{j2\pi(1+f)n} = e^{j2\pi(f)n}$ ؟ در اینصورت به نظرِ شما در زمان‌گسسته، آیا منطقی است که هر دویِ آنها به عنوانِ عضوِ پایه و یک فرکانس(رنگِ) جداگانه لحاظ گردند؟ آیا در زمان‌پیوسته چنین نکته‌ای هست؟ یا باید رنگ‌ها یا همان فرکانس‌ها را از $-\infty$ تا $+\infty$ لحاظ کرد؟

پرسش ۳: عبارتی برای محاسبهٔ وزنِ هر یک از فرکانس‌هایِ گوناگونِ نهفته در یک سیگنالِ گسستهٔ x را که با $X(f)$ نشان می‌دهیم، از رویِ صورتِ متغیر با زمانِ $x(n)$ داده شده، ارائه کنید. عبارتِ برگشتی را نیز بدست دهید. یعنی با فرضِ داشتنِ $X(f)$ عبارتی برایِ یافتنِ $x(n)$ بدهید.

توجه: در رنگ‌هایِ ضربه‌ای که بالاتر آشنا شدیم، اندازهٔ اقلیدسیِ(مربعیِ)[30] هر تک‌رنگ، برابرِ واحد بود و لذا اصطلاحاً رنگ‌ها یکه نیز بودند. اما چنانچه دقت کنید در رنگ‌هایِ دوره‌ای یا فرکانسی، چنین نیست و لذا لازم است در عبارتِ برگشتی جبران گردد. یادآوری می‌گردد که مربعِ اندازهٔ مربعی، مساویِ ضربِ داخلیِ بردار در خودش است درحالیکه برایِ اندازه‌هایِ دیگر چنین نیست. فقط دقت نیز بکنید که وقتی بجایِ میدانِ اعدادِ حقیقی از میدانِ اعدادِ مختلط بهره می‌برید، ضربِ داخلی می‌شود ضربِ اولی در مزدوجِ دومی![31] ضمناً توجه کنید که به اندازهٔ ۲یِ سیگنال، انرژیِ سیگنال نیز گفته‌اند.

$a\cos(\Omega n) - b\sin(\Omega n) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\Omega n + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ ، درجا می‌نویسید: $real\left(c\, e^{j\Omega n}\right)$ که در آن $c = (a+bj) = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{j\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$.

[30] ممکن است برایِ کسانی که با اندازه‌هایِ دیگر آشنا نیستند، پرسشی پیش آید که مگر اندازه‌هایِ غیر اقلیدسی نیز هست؟ پاسخ آری است! اندازهٔ اقلیدسیِ بردار، اصطلاحاً اندازهٔ ۲ یا مربعی نامیده می‌شود و اندازه‌هایِ ۱، ۳، ۱۰۰، ... تا بسیار بزرگ به سمتِ بی‌نهایت نیز تعریف می‌گردند. اینکه اساساً منظورِ ما از اندازه چیست و چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد، بحثِ چندان پیچیده‌ای نیست و در یک جمله می‌توان خلاصه نمود: بحثِ نزدیکی و دوریِ یک بردار از دیگری موضوعی است که اصطلاحاً برایِ ما مفهومِ فاصلهٔ دو بردار را پیش کشیده است. ما فاصلهٔ دو بردار را می‌خواهیم فقط و فقط با یک مقداری مشخص کنیم. بردار می‌تواند چند مقداری در یک آرایه بر حسبِ یک پایه‌ای بیان گردد ولی فاصلهٔ دو بردار برایِ ما مفهومی دارد که فقط با یک عدد باید بیان گردد و البته منفی بودن نیز برایِ ما معنی ندارد! و ضمناً قضیهٔ حمار نیز باید برایِ آن صدق کند! چراکه باید بردارِ تفاضلِ دو بردار، حتماً صراطِ مستقیم(رویهٔ کمترین فاصلهٔ) بینِ آن دو را بدهد. لذا هر عبارتی که فاصلهٔ هر بردار از بردار صفر را با لحاظِ دو شرطِ گفته شده، بدهد، مجاز است که طولِ بردار یا اندازهٔ آن قلمداد گردد. حال ملاحظه کنید که مثلاً عبارتِ $\left\|x(n)\right\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left|x(n)\right|^p\right)^{1/p}$ بازایِ هر $p \in [1,\infty)$ می‌تواند طولِ سیگنال قلمداد گردد. البته برایِ $p=\infty$ نیز بصورتِ سادهٔ زیر تعریف می‌گردد: $\left\|x(n)\right\|_\infty = \sup\left|x(n)\right|$ یا بطور خلاصه حاشیهٔ(*bound*) آن گفته می‌شود. و وقتی گفته شود که سیگنالی حاشیه‌دار(*bounded*) است یعنی این اندازه‌اش موجود بوده و نامحدود نیست.

[31] این نیز دلیلِ جالبی دارد که باز می‌گردد به چگونگیِ تعریفِ ضربِ داخلی که از حوصلهٔ اینجا فعلاً خارج به نظر می‌رسد.

حال ببینید شما هم مانند من بدست آورده‌اید. من برایِ زمان‌گسسته دو عبارتِ رفت و برگشتیِ

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j2\pi f n} \qquad , \quad x(n)=\int_{\langle 1\rangle} X(f)e^{j2\pi f n}\, df$$

و برایِ زمان‌پیوسته دو عبارتِ رفت و برگشتیِ

$$X(f)=\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad , \quad x(t)=\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}\, df$$

را بدست آورده‌ام. برای جزئیات حتماً به نوشته‌هایِ تدریس‌یار و تمرین‌هایِ کلاسیِ مربوطه مراجعه کنید!

اما در ادامه دانشمندان متوجه شدند که بسیاری سیگنال‌هایِ مهم را نمی‌توان بوسیلهٔ این پایه بیان نمود. یا به زبان ریاضی‌تر باید گفت که انتگرال(جمع)هایِ سمتِ چپِ بالا ممکن است، پاسخ نداشته باشند. این بویژه می‌تواند رخ دهد اگر اندازهٔ ۲ی سیگنال(انرژیِ سیگنال) محدود نباشد. لذا چنانچه این اندازه یا اندازهٔ یکِ آن محدود باشد($\|x\|_2 < \infty$ یا $\|x\|_1 < \infty$) می‌توان مطمئن بود که سیگنال، رنگِ دوره‌ای(طیف) دارد. اما در غیر اینصورت بسیار ممکن است که حداقل در برخی فرکانس‌ها این عبارت به بسیار بزرگ میل کند.

باید توجه نمود که این مشکل عموماً برایِ سیگنال‌هایی رخ می‌نماید که بصورتِ مضاعف(فزاینده)ای بزرگ می‌شوند. لذاست که برایِ رفعِ نسبیِ این مشکل، پایه‌هایِ دیگری را پیش کشیده‌اند که خاصیت مضاعفی(فزایندگی) را نیز در بر گیرند. برایِ این منظور کافی است به نمایِ موهومی‌ای که معنیِ دوره‌ای بودنِ سیگنال را در بر دارد، نمایِ حقیقی نیز تزریق گردد که معنیِ مضاعف بودن دارد. پایهٔ $\Phi_\Omega = e^{j\Omega n}$ و $\Phi_\omega = e^{j\omega t}$ هر یک به پایه‌هایِ عمومی‌ترِ $\Phi_z = r^n e^{j\Omega n} = \left(re^{j\Omega}\right)^n = z^n$ و $\Phi_s = e^{\sigma t}e^{j\omega t} = e^{\sigma t + j\omega t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{st}$ تعمیم می‌یابند. توجه کنید که: $\omega = \Omega = 2\pi f$

لذا عبارت‌هایِ چهارگانهٔ بالا بصورتی که می‌آید، عمومی‌تر می‌شوند.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad , \quad x(n)=\tfrac{1}{2\pi j}\oint_{2\pi} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

$$X(s)=\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \qquad , \quad x(t)=\tfrac{1}{2\pi j}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(s)e^{st}\, ds$$

می‌توان تغییرِ sها در پایهٔ e^{st} ها را به حرکت رویِ محوری موازیِ محورِ $j\omega$ ولی با مقدارِ حقیقیِ σ، تعبیر نمود. به همین ترتیب می‌توان تغییرِ zها را در پایهٔ z^{n} ها به حرکتِ رویِ دایرهٔ به شعاعِ r تعبیر نمود.

حال توجه کنید که پایه‌هایِ ممکن برایِ بیانِ یک سیگنال نیز افزایش یافتند. برایِ هر سیگنالِ پیوسته ممکن است تعداد بی‌شماری از این محورهایِ موازی، بتوانند معرفِ پایه‌ای برایِ آن باشند. و یا هنوز هیچکدام کارساز نبوده و عبارت‌هایِ بالا نیز در مورد آن به مقدارِ محدودی میل نکند. لذاست که گفته می‌شود لاپلاسِ یک سیگنال، ناحیهٔ همگرایی‌ای بصورتِ نوار دارد که هر یک از محورهایِ آن ناحیه می‌تواند پایه‌ای برایِ بیان آن سیگنال باشد. چنانچه هیچ ناحیهٔ همگرایی‌ای نباشد در واقع سیگنالِ مزبور نه تنها فوریه ندارد بلکه لاپلاس نیز ندارد.

مشابهِ همین برایِ گسسته نیز اگر ناحیهٔ همگرایی‌ای وجود داشته باشد، بصورتِ دیسک‌هایی است که هر یک از دایره‌هایِ آن می‌تواند معرفِ پایه‌ای برای بیانِ سیگنال باشد.

گفتیم که تبدیلِ لاپلاس و یا تبدیلِ زد چیزی نیستند جز همان تبدیلِ فوریه یا همان طیف! و فقط تعمیمی هستند تا سیگنال‌هایی که بدلیلِ فوریه نداشتن از طیف داشتن محروم مانده‌اند، از این محرومیت نجات یابند. لذا آنچه در بالاتر گذشت را می‌توان چنین نیز گفت: اگر سیگنالِ ما آنقدر فزاینده است که نمی‌توان فوریه برایِ آن محاسبه نمود، آن را با ضرب در r^{-n} با rی مناسب(معادلاً در پیوسته ، $e^{-\sigma t}$ با σی مناسب)، آنقدر تضعیف می‌کنیم تا فوریه‌دار شده و لذا طیف‌دار نیز می‌شود!

در ادامه می‌خواهیم با چندین نمونه از سیگنال‌های آشنا، این عبارت‌هایِ رفت به حوزهٔ فرکانس و برگشت به حوزهٔ زمان را بهتر درک کنیم.

پرسش ۴: بیایید ابتدا کمی با سیگنال‌هایِ پایه آشنا شویم. آیا می‌توانید این سیگنال‌ها را بوسیلهٔ نرم‌افزار *matlab* نمایش داده، حس درستی یافته و به ما القا کنید؟ مثلاً در فاصلهٔ زمانی $n\in[-20:1:20]$، سیگنال‌های z^{n} را برای $\Omega\in\left[-\pi:\frac{\pi}{15}:\pi\right]$ و $r=1$ رسم کنید. سپس همین را برای rی کوچکتر از واحد مثلاً $r=0.97$ و rی بزرگتر از واحد مثلاً $r=1.05$ نیز اجرا کنید. *راهنمایی:* توجه کنید که این سیگنال‌ها مقادیر مختلط خواهند داشت و لذا شما آنها را به سه روش می‌توانید نمایش دهید. روش اول اینکه قسمت حقیقی و موهومی را هر یک جداگانه برحسب زمان زیر هم رسم کنید و روش دوم اینکه اندازه و فاز را بر حسب زمان زیر هم رسم کنید و روش سوم اینکه زمان را حذف نموده و در صفحهٔ مختلط، قسمت موهومی را بر حسب حقیقی رسم کنید. برای این، توصیه می‌گردد که با دستورهای

***real* ، *imag* ، *abs* ، *phase* ، *plot* ، *subplot* ، *figure* ، *grid* و *axis* آشنا شوید. ضمناً توجه کنید که در محیط این نرم‌افزار، این امکان وجود دارد که پوشه‌ای با پسوندِ *m.* باز نموده و یک رشته عملیاتی را که می‌خواهید، نوشته و دوباره در پنجرهٔ اصلی فقط با صدا نمودنِ نامی که به آن پوشه داده‌اید، یکجا همه را اجرا کنید.**

پرسش ۵ : مشابهِ پرسش پیشین، در موردِ سیگنال‌های پایهٔ e^{st}ها، اجرا کنید. *راهنمایی:* در اینجا مثلاً $t \in [-20:0.01:20]$ و $\omega \in [-2\pi \cdot 10Hz : 2\pi \cdot 1Hz : 2\pi \cdot 10Hz]$ را برای $\sigma = 0$ و سپس برای یک σی مثبت مثلاً $\sigma = 0.1$ و یک σی منفی مثلاً $\sigma = -0.1$ رسم نمایید. تمامی این بازه‌ها فقط یک پیشنهاد است! و خودتان هر بازه‌ای را برای القای مطالبی که حس می‌کنید، مناسب‌تر می‌دانید، بکار برید.

پرسش ۶: نشان دهید برای هر سیگنال حقیقی x داریم: $X(-\omega) = X^*(\omega)$ و $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$ یا به عبارتِ عمومی‌تر: $X(s^*) = X^*(s)$ و $X(z^*) = X^*(z)$. لذا نشان دهید که برای سیگنال‌های حقیقی، عبارت‌های برگشتی را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$x(n) = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} real\left(X(\Omega)e^{j\Omega n}\right)d\Omega + C = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} \left|X(\Omega)\right|\cos\left(\Omega n + \angle X(\Omega)\right)d\Omega + C$$

$$x(t) = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\infty} real\left(X(\omega)e^{j\omega t}\right)d\omega + C = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\infty} \left|X(\omega)\right|\cos\left(\omega t + \angle X(\omega)\right)d\omega + C$$

$$x(t) = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\infty} real\left(X(s)e^{st}\right)d\omega + C \quad \text{و} \quad x(n) = \tfrac{1}{\pi}\int_{0^+}^{\pi} real\left(X(z)z^{n}\right)d\Omega + C$$

توجه کنید که C همان مقدارِ متوسطِ سیگنال یا ثابتِ سیگنال یا به گفتهٔ الکترونیکی‌ها، dcی سیگنال در کل زمان است.

پرسش ۷: لاپلاس سیگنال ضربهٔ زمان‌پیوسته(یعنی $\Delta(s)$) و زدِ سیگنال ضربهٔ زمان‌گسسته(یعنی $\Delta(z)$) را بدست آورده و ناحیهٔ همگرایی را نیز معرفی نمایید. حال محاسبهٔ تحلیلی کنید که آیا عبارت‌های برگشتی، همان $\delta(t)$ و $\delta(n)$ را نتیجه می‌دهند. *راهنمایی:* برای $t = 0$ و $n = 0$ جدای از $t \neq 0$ و $n \neq 0$ محاسبه کنید.

در ادامه، همان تحقیق را با محاسبهٔ عددی و بکمک نرم‌افزارِ *Matlab* انجام دهید. یعنی حوزهٔ فرکانس را در بازهٔ $[0, \omega_L]$ با گام‌هایِ فرکانسیِ $\Delta\omega$یی که خود انتخاب می‌کنید، تقسیم نموده و عبارتِ انتگرالی را بصورتِ عددی محاسبه نمایید(می‌توانید از عبارتِ برگشتی که در پرسشِ بالا برایِ سیگنال‌هایِ حقیقی یافتیم، استفاده کنید و فعلاً $\sigma = 0$ بگیرید). سپس ملاحظه می‌کنید که با هر چه کوچکتر نمودنِ گام و بزرگتر نمودنِ بازه، آیا

حاصل، به ضربهٔ واحد نزدیک‌تر می‌گردد. مشابهِ همین را برای ضربهٔ گسسته، با گامِ $\Delta\Omega$یی که در بازهٔ $[0, \pi]$ انتخاب می‌کنید، اجرا کنید. همهٔ آنچه انجام داده‌اید را با دو σی غیرِ صفر(منفی و مثبت) و دو r غیرِ واحد(کوچکتر و بزرگتر از واحد)، تکرار کنید.

پرسش ۸: مشابهِ بالا برای سیگنال پلهٔ واحد زمان‌گسسته $u(n)$ و زمان‌پیوسته $u(t)$ انجام دهید.

پرسش ۹: مشابهِ بالا برای سیگنال نماییِ سمتِ راستی $a^n u(n)$ و $e^{\sigma t} u(t)$ در دو حالتِ فزاینده با زمان و کاهنده با زمان، انجام دهید.

پرسش ۱۰: مشابهِ بالا، ولی فقط بصورت تحلیلی، برای سیگنال‌های نماییِ سمتِ چپی انجام دهید.

پرسش ۱۱: برای سیگنال‌های آشنای دیگر نیز این موضوع را دنبال کنید.

پرسش ۱۲:آیا می‌توان گفت، سیگنال‌هایی که فقط در یک پنجرهٔ زمانی، مقدار غیر صفر داشته و در همه جای بیرون آن(هم چپ و هم راست)، صفراند، ناحیهٔ همگرایی‌شان همهٔ صفحهٔ مختلط را فرا می‌گیرد؟ دلیل بیاورید!

پرسش ۱۳: اگر سمتِ راستی(یعنی از یک جایی به چپ صفراند) یا سمتِ چپی(یعنی از یک جایی به راست صفراند) باشند در موردِ ناحیهٔ همگرایی‌شان چه می‌توانید بگویید؟

کمی بیشتر دربارهٔ نگاهِ تغییری و پیش کشیدنِ سیستم‌های ریاضیِ فرضی

حسِ ما که بدنبالِ چگونگیِ تغییر از یک دوره(گام) به دورهٔ(گامِ) بعدی بوده‌ایم و گویی این چگونگیِ تغییر و در واقع این مقدارِ تغییر برایِ ما از اهمیتی برخوردار بوده است مفاهیمی از قبیلِ تفاضل بینِ یک گام به گام بعدی یا یک گام با گامِ قبلی و در شکلِ زمانِ پیوسته سرعتِ متوسطِ تغییر و سرعت لحظه‌ایِ تغییر و همینطور مشتقاتِ آن را در زبان ریاضی بوجود آورده است. به همین ترتیب است که الگوهایِ(کلمه‌هایِ) ریاضیِ انتگرال و سیگما(جمعِ پشتِ سرِ هم زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته) ساخته شده‌اند. نمایش‌هایِ جبری و بلوکی‌ای هم برای نشان دادنِ انواعِ ارتباطاتی که اینها با یکدیگر دارند و یا می‌توانند داشته باشند نیز ساخته‌ایم.

در واقع گویی از یک سیگنالِ $x(t)$ یا $y(n)$ که در تصور داریم، شروع می‌کنیم و سیگنال‌هایِ دیگری می‌سازیم که به آن مربوط‌اند. چون در اینجا پیش از ساخته شدنِ سیگنال از سیگنالِ دیگر خودمان ربطِ آن دو را نیز ساخته‌ایم، لازم نیست در جایِ دیگر دنبالِ ربط باشیم بلکه فوراً رابطهٔ بینِ آن دو را در دلِمان، برقرارشده، داریم.

حال خوب دقت کنید که این یعنی: اگر به این دو نگاه کنیم پیشاپیش در دلِ خود نگاهِ عالَمی(سیستمی) را سامان داده‌ایم و حُکمِ بین آن دو را می‌دانیم و این سامانه در دلِ ما موجود است و این یعنی اصولاً لازم نیست بدنبالِ آن بگردیم! می‌خواهم بگویم در چنین ساختن‌هایِ ریاضی، اساساً همراه با ساخته شدنِ سیگنالِ جدید از رویِ سیگنالِ اول در واقع پیشتر سامانهٔ بین‌شان سامان داده شده است. اینها سیستم‌هایِ تخیلیِ عددی(ریاضی) هستند که اگر رعایتِ امانت شده باشد، اصولاً ممکن نیست که حرفِ دروغی زده شود. معمولاً به اینها بجای اینکه بگویند سیستم‌های تخیلیِ ریاضی می‌گویند الگوهای ریاضی یا مدل‌های ریاضی!

حال اگر سعی کنیم برای سیستمی، الگویِ ریاضی‌ای بیابیم که داستانِ آن الگو با داستانِ عددیِ این سیستم همانند باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود که در حال الگو(مدل)سازیِ ریاضیِ این سیستم، هستیم.

اما هنگامی که بخواهیم چنین سیستمِ صرفاً عددیِ تخیلی(ریاضی) را با تکیه بر برخی مهارهایِ خدا، مشابه(مانند)سازی کنم، اصطلاحاً می‌گوییم این الگویِ ریاضی را شبیه(مانند)سازی می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم چیزی غیرِ تخیلی سامان داده شود که چنانچه به آن نگاه کنم(یا دیگری نیز نگاه کند)، همان چیزی را ببینم(و ببیند) که در الگویِ ریاضی، ظنِّ آن(فرضِ آن) را در دلم، هم اکنون، دارم می‌بینم. یعنی می‌خواهم به قولِ قرآن داستانِ آنچه سامان داده می‌شود مانندِ داستانِ الگویِ ریاضیِ ظنّیِ(فرضیِ) نزدِ من باشد. قرآن از این کار برایِ مفهوم کردنِ بسیاری از مطالب استفاده کرده است. معمولاً از اصطلاحِ مَثَل، استفاده شده است. یک مورد بشنوید: ﴿مَثَلُ الذین ینفقون اموالهم فی سبیل الله کَمَثَلِ حَبَّه اَنبتت سبع سَنابل فی کل سُنبله مِائَه حبه والله یضاعف لمن یشاء والله واسعٌ علیمٌ﴾[32] . داستانِ کسانی که اموالشان را در راه خدا می‌دهند مانندِ داستانِ دانه‌ای است که ۷ خوشه برویاند که در هر خوشه‌ای ۱۰۰ دانه، درحالیکه خداوند برایِ هرکه بخواهد مضاعف(چندین برابر) می‌کند و خداوند پخش‌کنندهٔ داناست.

هم اکنون یکی از متداول‌ترین مهارهایی که با تکیه بر آن، شبیه‌سازی انجام می‌گیرد، رایانه است که در آن با استفاده از الکترونیک، شبیه‌سازیِ رقمی‌ای، برایِ آن سیستمِ صرفاً ریاضی، صورت می‌پذیرد. سابق بر این، شبیه‌سازهایِ الکترونیکی و پیشتر از آنها، الکترومکانیکی و مکانیکی نیز بوده‌اند.

[32]سورهٔ بقره(۲) آیهٔ ۲۶۱

چون برایِ سرعتِ سیگنالِ $x\left(t\right)$ در لحظهٔ t ، از نمایشِ $sx\left(t\right)$ استفاده می‌شود به همین ترتیب، سیگنالی که از جمعِ مساحتیِ(انتگرالِ) آن از خیلی قبل تا لحظهٔ t بدست می‌آید، یعنی $\int_{-\infty}^{t} x\left(\tau\right)d\tau$ را بصورتِ $\frac{1}{s}x\left(t\right)$ نمایش می‌دهند و یا چنانچه بخواهند نگاهِ سیستمی‌ای را نیز القا کنند، ممکن است یکی از نمایش‌هایِ جعبه‌ایِ

$$\xrightarrow{\dot{x}(t)} \boxed{\tfrac{1}{s}} \xrightarrow{x(t)}$$ یا

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\tfrac{1}{s}} \xrightarrow{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$$ یا

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{s} \xrightarrow{\dot{x}(t)}$$

را حسبِ نگاهِ سیستمی‌ای که می‌خواهند القا کنند، بکار گیرند.

توجه کنید که الگوهایِ ریاضیِ دیگری که شما از دبستان با آن آشنایید نیز بصورتِ جعبه‌ای نمایش داده می‌شوند که از آن جمله می‌توان جمع‌کننده و یا ضرب کنندهٔ دو یا چند سیگنال، ضرب در عدد(بهره دادنِ به) یک سیگنال نام برد.

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{a} \xrightarrow{ax(t)} \qquad \begin{array}{c} y(t) \\ \downarrow \\ x(t) \rightarrow \otimes \xrightarrow{(xy)(t)} \end{array} \qquad \begin{array}{c} y(t) \\ \downarrow \\ x(t) \rightarrow \oplus \xrightarrow{(x+y)(t)} \end{array}$$

<u>**پرسش ۱۴: (سببی و ناسببی بودن سیستم‌ها) در هر یک از این الگوها، حداقل اطلاعاتی که باید در هر لحظه، از ورودی(ها)، در اختیار باشد تا بتوانند خروجی را در آن لحظه تعیین کنند، چیست؟ کدامیک به اطلاعاتِ پیش(قبل)تر و کدامیک به اطلاعاتِ پس(جلو)تر و کدامیک تنها به اطلاعاتِ همآن لحظهٔ ورودی(ها)، نیاز دارند؟ (در اینجا برای آنانکه به اطلاعاتِ پیشتر نیاز دارند، نامی بدهید. برای آنانکه به اطلاعاتِ جلوتر نیاز دارند و آنانکه فقط به اطلاعاتِ همان لحظه نیاز دارند نیز هر یک، نامی بدهید.**</u>

<u>**پرسش ۱۵: روشن است که از ترکیبِ اینها با یکدیگر نیز می‌توان الگوهای ریاضیِ پیچیده‌تر نیز القا نمود. برای نمونه موارد زیر را سعی کنید خودتان بصورتِ جعبه‌ای به نمایش درآورید.**</u>

سیستمی که فرض می‌کند شتاب را دارد(یعنی شتاب را ورودی می‌گیرد) و سرعت و خودِ سیگنال را از آن نتیجه می‌گیرد.

سیستمی که فرض می‌کند سرعتِ شتاب را دارد(یعنی سرعتِ شتاب را ورودی می‌گیرد) و شتاب و سرعت و خودِ سیگنال و انتگرالِ آن را بدست می‌دهد.

سیستمی که خودِ سیگنال را ورودی می‌گیرد و سرعت و شتاب آن را بدست می‌دهد.

سیستمی که فرض می‌کند سرعتِ سیگنال همواره برابرِ خودِ سیگنال است. این سیستم اگر از مقدار واحد برایِ سیگنال مورد نظر شروع کند(مثلاً در لحظهٔ t_0) چگونه پیش خواهد رفت؟ آیا قبلاً با چنین سیگنال‌هایی آشنا بوده‌اید.

سیستمِ ث را بگیرید، فقط بجایِ "همواره برابر" بگذارید: "همواره برابرِ منفیِ"

سیستمِ ث را بگیرید، فقط بجایِ "همواره برابر" بگذارید: "همواره a برابرِ"

سیستمِ ث و ج و ح را بگیرید، فقط بجایِ "سرعتِ سیگنال" بگذارید: "شتابِ سیگنال"

موارد مشابهِ آنچه در بالا دربارهٔ زمانِ پیوسته آمد برایِ زمانِ گسسته نیز می‌تواند پیش کشیده شود. در این نوع آنچه بیش از همه مورد توجه است، تغییر از یک گام به گامِ بعدی است. لذاست که سیگنالِ یک گام قبل(پیشین)،

$z^{-1}x(n) = x(n-1)$ ،

یا یک گام جلو(پسین)،

$zx(n) = x(n+1)$ ،

از سیگنالِ مفروضِ $x(n)$ مورد توجه است.

$\xrightarrow{x(n+1)} \boxed{\frac{1}{z} = z^{-1}} \xrightarrow{x(n)}$ یا

$\xrightarrow{x(n)} \boxed{\frac{1}{z} = z^{-1}} \xrightarrow{x(n-1)}$ یا

$\xrightarrow{x(n)} \boxed{z} \xrightarrow{x(n+1)}$

چراکه مثلاً با تفاضلِ آنها از سیگنالِ اصلی می‌توان تغییر در هر گام از گامِ پیشین، مشهور به تفاضلِ معکوس

$w(n)=x(n)-x(n-1)=x(n)-z^{-1}x(n)$،

و یا

تغییر در هر گام به گامِ پسین، مشهور به تفاضلِ مستقیم

$v(n)=x(n+1)-x(n)=zx(n)-x(n)$

را بدست آورد.

پرسش ۱۶: مشابهِ پرسش بالا که در موردِ زمان‌پیوسته داشتیم، می‌توان دربارهٔ زمان‌گسسته نیز پیش رفت.

سیستمی که فرض می‌کند دو گام‌پس را دارد(یعنی دو گام‌پس را ورودی می‌گیرد) و یک گام‌پس و خودِ سیگنال را از آن نتیجه می‌گیرد.

سیستمی که خودِ سیگنال را ورودی می‌گیرد و یک گام‌پس و دو گام‌پس را می‌دهد.

سیستمی که فرض می‌کند یک گام‌پسِ سیگنال همواره $\frac{1}{2}$ برابرِ خودِ سیگنال است. این سیستم اگر از مقدار واحد برایِ سیگنال مورد نظر شروع کند(مثلاً در لحظهٔ n_0) چگونه پیش خواهد رفت؟ آیا قبلاً با چنین سیگنال‌هایی آشنا بوده‌اید.

سیستمِ ت را بگیرید، فقط بجایِ $\frac{1}{2}$ بگذارید: 2

در سیستم‌های ت و ث بجایِ ضریب‌های مثبت، منفی را فرض کنید.

سیستمِ ت را بگیرید، فقط بجایِ $\frac{1}{2}$ بگذارید: r

سیستم‌هایی که تفاضلِ مستقیم و تفاضلِ معکوس را از ورودیِ سیگنالِ اصلی می‌سازد.

سیستمی که ورودی را سیگنالِ اصلی گرفته و جمع سریِ از ازل تاکنونِ همان سیگنال را می‌دهد.

پرسش ۱۷: در هر یک از مواردِ دو پرسش بالا، تعیین کنید که احیاناً برای شبیه‌سازی عددی در رایانه، چند حافظه لازم است. الگوریتم برنامهٔ مورد نیاز برای اجرا را بگویید. موارد را در نرم‌افزارِ بالا اشاره شده، پیاده‌سازی نموده و نتایج را ببینید.

خطی بودنِ یک سیستم یعنی چه؟

این موضوع بسیار ساده است و در یک جمله خلاصه می‌شود: ویژگیِ جمع حفظ گردد. برای سادگیِ از همان تعبیر ریاضیِ رابطه یا حُکم استفاده می‌کنیم. نگاهِ سیستمی یعنی تمامیِ سیگنال‌هایِ نامگذاری شدهٔ از x_1 تا x_m در یک رابطهٔ چندتاییِ‌ای با هم هستند: $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in R_1$

آنگاه هنگامی می‌گوییم سیستمِ R_1 خاصیتِ جمع را حفظ می‌کند یا اصطلاحاً خطی است که داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} \forall (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in R_1 \\ \wedge \\ \forall (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in R_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_m + y_m) \in R_1$$

پرسش ۱۸: پاسخ دهید که سیستم مشتق‌گیر، انتگرال‌گیر، جمع‌گر دو سیگنال، ضرب‌گر در عدد، یک گام‌پس، یک گام‌پیش و هر یک از مواردِ یاد شده در آن دو پرسش مفصل بالا، کدامیک خطی بوده‌اند و کدامیک خیر؟ آیا اصولاً سیستمی که فقط از ترکیب سیستم‌های خطی ساخته شود، خود خطی باقی می‌ماند یا خیر؟

پرسش ۱۹: آیا سیستمِ ضرب‌گرِ دو سیگنال، خطی است یا خیر؟ ۵ نمونه، سیستم ریاضیِ فرضیِ غیر خطی بیاورید.

پرسش ۲۰: می‌توان به سیستم‌های ریاضی‌ای که با نگاهِ تغییری می‌سازیم و لذا پیشاپیش رابطهٔ(سیستم) بین آنها را می‌دانیم، توجه نموده، ببینیم، آیا می‌توان در نگاهِ رنگیِ لاپلاس یا زدِ آنها نیز رابطه‌ای بین آنها یافت یعنی رابطهٔ بین لاپلاس آنها را یافت. سعی کنید برای مواردی که نام برده می‌شوند، پاسخ دهید. جمع‌گر و ضرب‌گر دو سیگنال، n_0 گام پیش‌انداز و یا پس‌انداز، آینه‌کنندهٔ سیگنال نسبت به مبدأ زمان، ضرب‌کنندهٔ سیگنال در یک عضو پایه مثلاً $e^{s_0 t}$ یا z_0^n، در زمان ضرب‌کنندهٔ سیگنال، فشرنده یا کِشندهٔ سیگنال در زمان، جمع‌کنندهٔ سیگنال(انتگرال‌گیرنده) از ازل تاکنون و سرعت‌ساز از سیگنال، و یا بطور مشابه در گسسته، تفاضل مستقیم و تفاضل معکوس‌ساز.

پرسش ۲۱: با پوشهٔ صدایی که با پسوندِ *wav*. در رایانه در اختیار دارید، شروع کنید. با دستورِ *wavread* اطلاعاتِ آن را بصورت رقمی وارد آرایه‌ای در محیط *matlab* کنید. فرکانسِ نمونه‌برداری و تعداد رقم(*bit*)هایِ مربوطه را نیز بخوانید.

الف) دقیقاً شرح دهید که هر یک از اینهایی که خوانده‌اید، چه معنی می‌دهد؟

ب) آیا سیگنال مقدارِ ثابت دارد؟ اگر آری، آن را حذف نموده بازبینی کنید. بازبینی: حاصل را بازسازی نموده و صدایش را گوش کنید و ببینید آیا فرقی احساس می‌کنید.

پ) همهٔ موجودیِ سیگنال را تا فرکانسِ *100Hz*، از بین برده و حاصل را بازبینی کنید. به این می‌گویند فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطعِ *100Hz* .

ت) همان کار پ را انجام دهید برایِ فرکانس‌هایِ قطعِ *400Hz* ، *1kHz* و *4kHz* و این بازی را ادامه داده تا نتایجِ محسوسی بدست آورید. حس خود را گزارش کنید.

ث) از یک فیلترِ ایده‌آلِ بالاگذرِ با فرکانسِ گذرِ *1kHz* عبور داده و حاصل را بازبینی کنید.

ج) یک فیلترِ میان‌گذرِ با فرکانسِ گذرِ *20Hz* و فرکانسِ قطعِ *4kHz* و بازبینی!

چ) یک فیلتر با بهرهٔ متغیر در همان بازهٔ فرکانسیِ ج بگونه‌ای که در *1kHz* یک برابر و در *4kHz* ، ۴برابر و در بقیه به همین نسبت!

ح) فیلتری که فقط فاز را دست زده و بازایِ تمامِ فرکانس‌ها ۹۰ درجه افزایش فاز دهد.

خ) فیلتری که فاز را بازایِ هر یکدهم فرکانس نمونه‌برداری ۲۰ درجه کاهش دهد.

درس سوم

معادلات حالت ، تابع تبدیل و رفتارشناسی

نامتغیر بودنِ با زمان در سیستم‌ها یعنی چه؟ بویژه در نگاهِ تغییری !

یادآوری می‌گردد که نگاهِ سیستمی به مجموعه‌ای از سیگنال‌ها، یعنی، القایِ حکمی بینِ آنها یا به قولِ ریاضی، القایِ وجود رابطه‌ای بین آنها !

در نگاهِ تغییری که سیگنال‌ها با زمان تغییری می‌توانند داشته باشند، سیستمی دیدن، یعنی، در هر زمان رابطه‌ای بینِ آنها برقرار دانستن و توجه داشته باشید که یکی از آنها نیز همان زمان است! حال اگر این رابطه که از ربطِ چگونگیِ تغییرهایِ آنها با یکدیگر سخن می‌گوید، طوری بیان گردد که خود، هر لحظه با لحظهٔ دیگر تغییر کند، می‌گوییم سیستم با زمان تغییر می‌کند. ولی چنانچه بتوان این رابطه را مستقل از متغیرِ زمان بیان نمود، می‌گوییم سیستم مزبور نامتغیر با زمان(*Time invarient*) بیان شده است.

به زبان ریاضی‌تر در حالت عمومی بصورت زیر است: $(x_1,\cdots,x_m,t)\in R_1$

یا معادلاً با نگاهِ تغییر با زمان: $(x_1(t),\cdots,x_m(t))\in R_1(t)$

حال اگر بتوان وابستگیِ رابطه با زمان را نیز برداشت، داریم: $(x_1(t),\cdots,x_m(t))\in R_1$

که در اینصورت، اصطلاحاً می‌گوییم، سیستم مستقل از زمان (*Autonomous*) بیان شده است.

پرسش ۲۱: آیا می‌توانید آزمونی ارائه کنید که با آن بتوان در سیستم‌هایِ ریاضی، متغیر بودن و نبودنِ سیستم با زمان را تشخیص داد؟

پاسخ: کافی است ببینیم اگر سیگنال‌هایی با هم در رابطه‌اند آیا با جابجاییِ آنها در زمان[۳۳]، باز هم در همان رابطه‌اند !؟ یعنی: $(x_1(t),\cdots,x_m(t))\in R_1(t)\xrightarrow{?}(x_1(t-t_0),\cdots,x_m(t-t_0))\in R_1(t)$

اگر پاسخ آری باشد، آنگاه می‌توان شناسهٔ زمان را از $R_1(t)$ انداخته و چنین نوشت: $(x_1(t),\cdots,x_m(t))\in R_1$

[۳۳] یا انتقال در زمان یا *shift in time*

پرسش ۲۲: در سیستم‌هایِ ریاضیِ نامبرده شده در پرسشِ۲۰ درسِ۲ ، متغیری با زمان را بیآزمایید.

پرسش ۲۳: سعی کنید خودتان نمونه‌هایی از هر دو نوعِ متغیر و نامتغیر با زمان ارائه دهید.

مهمترین الگویِ تغییری و تابع تبدیل با نگاهِ تغییری

همانگونه که پیشتر نیز گفته شد، در نگاهِ تغییری، چگونگی تغییر از یک زمان به زمان بعدی مورد توجهِ جدی است. حال در نظر بگیرید که در زمانی هستیم و اطلاعاتی از علامت‌هایِ عالَم را در آن زمان داریم! حال این پرسش مطرح است که آیا علمی که ما از حکمتِ(رابطهٔ) موجود بین آن علائم در آن عالَم داریم آنقدر هست که بتوان با این اطلاعاتِ موجود، همین علائم را در زمانِ بعدی بدست داد!؟

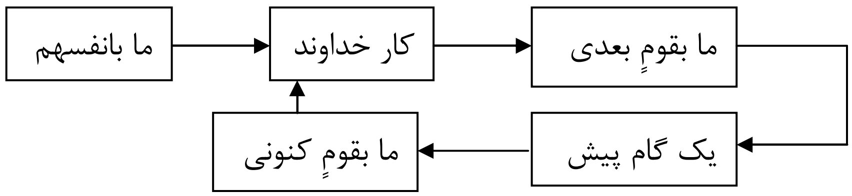
در واقع برای ما مهم است که بتوانیم وقتی در زمانی هستیم، دربارهٔ زمان بعدی و حتی زمانهایِ بعدی پیش بینیِ قاطعی داشته باشیم. در چنین صورتی و بویژه اگر پاسخِ شما در هر گام به گامِ بعدی یکتا نیز باشد، حس می‌کنیم قانون و قاعدهٔ آن عالَم را یافته‌ایم. از همین خواستگاه بوده است که الگوهایِ ریاضیِ معادلاتِ تغییری(دیفرانسیلی) و یا تفاضلی(دیفِرِنس) درست شده‌اند!

این فرض که چنین علمی داشته باشیم و همهٔ سیگنال‌هایِ لازم نیز در دسترس باشد، فرضی بسیار بزرگ است. پر واضح است که فقط آنکه همهٔ حکمت‌ها را محکم می‌کند و لذا به لطافت نیز همه را می‌داند یعنی حکیمِ علیم است، می‌تواند چنین ادعایی کند، فقط به عنوان اشاره بشنوید: ﴿لَه مُعقباتٌ من بین یدیه و من خلفه یَحفظونه مِن اَمر الله اِن اللهَ لا یُغیر ما بقومٍ حتی یُغیروا ما بِاَنفسهم و اذا اَراد الله بقومٍ سوءً فلا مَرَدَ لَه و ما لَهم مِن دونه مِن وال﴾[۳۴] . در اینجا قرآن می‌گوید که: برایِ هر کس تعقیب‌کنندگانی از پس و پیش است که نگهبانی می‌کنند از کارِ خداوند، بی‌تردید خداوند تغییر نمی‌دهد آنچه با گروهی است را تا تغییر دهند آنچه با خودشان است و چنانچه خداوند به گروهی، بدی‌ای را اراده کند، پس ردکننده‌ای برای‌اش نیست و نیست برایِشان جدایِ ازش گرداننده‌ای. سیستمِ بسیار دقیقی در کار است که امر خداوند به آن حاکم است ولی این به این معنی نیست که ما هیچ‌کاره‌ایم بلکه یک قانونِ اساسی نیز جاری است و آن این است که تغییرِ آنچه به هر گروهی باز می‌گردد، دقیقاً منوط است به تغییرِ آنچه به خودهاشان است. یعنی گویی در یک سیستمِ بسیار مفصلِ دقیقی قرار داریم ولی می توانیم با تغییری که در خودهامان می دهیم، موجباتِ تغییر در گروه‌مان شویم، اما رابطهٔ(حکمِ) این دو تغییر چگونه است؟ همان قوانینِ خداوندی است که از بقیهٔ قرآن می‌توان آنها را آموخت.

---

[۳۴] سورهٔ رعد(۱۳) آیهٔ ۱۱

به عبارت دیگر ما یک ورودی‌هایی به گروه می‌دهیم(بوسیلۀ تغییری که در خودمان می‌دهیم) که مجموعۀ این ورودی‌ها پس از طی فرآیندهایِ لازم و کافی که همگی همان کار خدا هستند، منجر به تغییری در گروهِمان خواهد گردید. در اینجا معلوم است که خداوند تسلط کامل به عالَمِ مربوط به آن گروه داشته و از هر لحظه به لحظۀ دیگر تغییرِ حکیمانه را می‌دهد. شکل ۳ سعی دارد ماجرا را بصورتِ بلوکی نمایش دهد.



شکل ۳

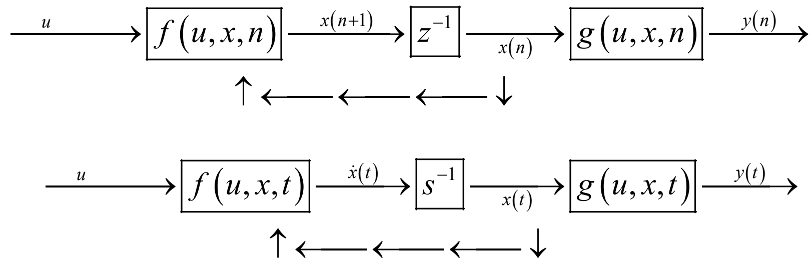
البته توجه دارید که نباید این نمایش شما را به این اشتباه بیاندازد که خداوند در این ماجرا با نفس‌ها کاری نداشته و آنها یله و رهایند. بلکه خداوند به تک تک نفوس نیز کار داشته و ربِ آنهاست که این موضوع، موضوعِ بحثِ گروهیِ اینجا نیست بلکه همان است که در اول آیه گفته شد: برایِ هر کس تعقیب‌کنندگانی از پس و پیش است که نگهبانی می‌کنند از کارِ خداوند!

ما الگوهایِ ریاضیِ تخیلی را با همان فرض در نظر می‌گیریم. اولاً فرض می‌کنیم در هر لحظه همۀ سیگنال‌هایِ لازم برایِ تغییرِ به لحظۀ بعد را داریم. ثانیاً فرض می‌کنیم، تمامِ احکام بینِ سیگنال‌ها را آنقدر بخوبی می‌دانیم که با دانستنِ سیگنال‌ها در کنون، می‌توانیم آنها را در لحظۀ بعدی بدست دهیم!

لذا بسیار توجه کنید که هنگامی هم که سعی دارید چنین الگویی را به یک سیستمِ غیر تخیلی بخورانید، در واقع چنین فرضی را گرفته‌اید، هر چند که این فرض صحیح نیست! اما بهرحال باید که تمام سعی خود را بانجام رسانید تا این فرض شما در محدوده‌ای که می‌بینید، نادرست نباشد. و اقلاً بتوانید نشان دهید که در آنچه دیده‌اید و یا می‌بینید چنین فرضی هنوز درست است. یعنی قوانینی را که ارائه می‌کنید و سیگنال‌های مورد نیاز، همگی در الگویی که داده‌اید، هنوز صدق کنند.

حال بیایید به کمترینِ تعدادِ سیگنال‌هایی که لازم است در هر لحظه داشت، تا با توجه به قوانینِ تغییر، تغییر به لحظۀ بعد را بدست آورد، نامی دهیم، حال یا حالتِ آن عالَم! . گویی بقیۀ سیگنال‌ها در هر لحظه از رویِ اینها قابل محاسبه‌اند. حالتِ عالَم است که از حالی به حالِ دیگر تحول می‌یابد و چنانچه قانونِ این تحول را در هر لحظه بدانید، در واقع همۀ عالَم را بخوبی دریافته‌اید! خوب دقت کنید که این تعداد، دقیقاً در ارتباط است

با آنچه شما از قانون می‌دانید و ارائه می‌کنید و این دو از هم مستقل نیستند. پس می‌توان گفت که در چنین الگویی، همواره با چیزی مشابهِ آنچه بصورتِ بلوکی در شکل ۴ آمده است، روبرو هستیم.



شکل ۴

پیش از هر ادامه، می‌خواهم نکتهٔ مهمی که عموماً توجه نمی‌شود، یادآور شوم. و آن هم این است که متغیرهایِ ورودی، اصلاً اینگونه نیست که جزوِ حالتِ عالَم نباشند، بلکه اتفاقاً از اساسی‌ترین علائمِ عالَم بشمار می‌آیند. فقط یک فرقِ اساسی بینِ آنها و بقیهٔ متغیرهایِ حالت وجود دارد که آنها را از ابتدا مجزا می‌آوریم. آن هم این هست که تغییرِ آنها مستقل از تغییرِ بقیه ممکن است! یا بعبارتِ بهتر یک اختیار و آزادی‌ای در چگونگیِ تغییرشان مفروض است. از طرفِ دیگر نیز توجه کنید که هر سیگنال که به عنوانِ خروجی مد نظر هست، در y گنجانده‌ایم که بنابه فرض حتماً در هر لحظه از رویِ xها و متغیرهایِ ورودی قابل بدست آوردن‌اند.

برایِ زمان‌گسسته می‌نویسیم: $x(n+1)=f\left(x(n),u,n\right) \quad , \quad y(n)=g\left(x(n),u,n\right)$

برایِ زمان‌پیوسته می‌نویسیم: $\dot{x}=f\left(x(t),u,t\right) \quad , \quad y(t)=g\left(x(t),u,t\right)$

توجه کنید که این دو عبارت هیچ فرقی ندارند جز همان فرقی که زمان‌گسسته و زمان‌پیوسته دارند. از همین‌جاست که تعبیرِ حالت اولیه، و یا همان شرایط اولیهٔ شروع، پیش کشیده می‌شود. به این ترتیب که از هر زمانِ t_0 به بعد با در دست داشتنِ $x(t_0)$ ولی u در هر زمان دلخواه، می‌توان حالت را در تمام زمان‌هایِ پسین و پیشین بدست داد.

اینکه آیا ورودی را به غیر از همان لحظه، در زمان‌هایِ پسین(بعدی) نیز نیاز داشته باشیم، موضوعی است که همواره سیستم‌ها را به دو نوعِ مهم تقسیم می‌کند. آنهاییکه در هر مرحله برایِ به هنگام شدن فقط به ورودی در همان مرحله نیاز دارند و بس! و آنهاییکه ورودی‌هایِ زمان‌هایِ آینده، در به هنگام شدنِ حالت‌ها در همین مرحله، تأثیر می‌گذارند. یعنی با اینکه ورودی، جلوتر، خواهد آمد ولی در چگونگیِ تغییر در همین زمانِ فعلی نیز اثر دارد. به همین دلیل است که ما در عباراتِ بالا u را بدونِ شناسهٔ زمان آوردیم و نه بصورتِ $u(t)$.

منظور این بود که ممکن است ورودی فقط در همان زمان t_0 کافی نبوده بلکه در هر زمانی جلوتر $t > t_0$ نیز نیاز باشد. اولی را سببی(علی) و دومی را غیرسببی(غیرعلی) می‌گویند. نام‌گذاری از این روست که ما عموماً انتظار داریم، آنچه در زمانِ کنونی می‌بینیم، فقط از ورودیِ زمان‌هایِ پیشین تا زمانِ کنونی، **سبب** شده باشد و نه از آنچه در آینده خواهد آمد.

پرسش ۲۴: برنامه‌ای در پوشهٔ m بنویسید که زمانِ شروع و پایان، تعداد متغیرهایِ حالت، حالت در شروع و ورودی در تمام زمانها را گرفته و با صدا نمودنِ تابعِ f، الگوریتمِ بالا برایِ زمان‌گسسته را اجرا نموده و در پایان متغیرهایِ حالت را بازایِ زمان، رسم کند. برای ساختنِ یک تابع از *help function* کمک بگیرید. برایِ آزمونِ برنامه‌تان می‌توانید سیستمِ حلِ عددیِ یک معادلهٔ تک مجهولیِ غیرخطی را در نظر گرفته و تابع لازم را برایِ آن نوشته و بگذارید که این سیستم از یک حلِ حدسیِ اولیه آغاز نموده و گام به گام به حلِ صحیح نزدیکتر شود.

پرسش ۲۵: آیا می‌توانید مشابهِ بالا برایِ زمان‌پیوسته نیز اجرا کنید. برای سادگی، گام‌هایِ جمع نمودن را ثابت گرفته و در ابتدایِ برنامه مقدارش را نیز از کاربر بپرسید. باز هم برایِ سادگی، از قاعدهٔ ذوزنقه برایِ جمع کردن، بهره برید.

پرسش ۲۶: اگر دقت کنید در پرسش ۵ شما در واقع کار را تبدیل نموده‌اید به همان زمان‌گسسته البته با این امکان که می‌توانید این گسستگی را تا جاییکه بخواهید کوچکتر کنید! حال آیا می‌توانید f_dیِ گسسته‌ای را که در واقع در حال کار است و ناشی از f_cیِ پیوسته است، بر حسبِ f_cبنویسید.

اگر f و g ترکیب خطی از متغیرها باشند(چه متغیرهایِ حالت و چه متغیرهایِ ورودی)، آنگاه برایِ سادگی می‌توان عباراتِ بالا را بصورتِ ماتریسی نمایش داد.

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n)u(n) \quad , \quad y(n) = C(n)x(n) + D(n)u(n)$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

البته اینها برایِ عالَم‌هایِ سببی نوشته شده‌اند و اگر غیر سببی باشد، لازم است که در خروجی، جملاتی شاملِ اثر ورودی در زمان‌هایِ جلوتر نیز بیاید مانند: $D_1(n)u(n+1)$ و $D_2(n)u(n+2)$ و ...

پرسش ۲۷: آیا عالَم‌هایی که چنین بیانی داشته باشند، خطی هستند؟ نشان دهید.

پرسش ۲۸: آیا می‌توانید ابعادِ هر یک از ماتریس‌هایِ نام‌برده، را یادآور شوید؟ بُعدِ حالت(تعداد متغیرهایِ حالت) را l و بُعدِ ورودی(تعداد متغیرهایِ ورودی) را i و بُعدِ خروجی(تعداد متغیرهایِ خروجی) را j بگیرید.

پرسش ۲۹: آیا می‌توانید بگویید وقتی شناسهٔ زمان را از ماتریس‌ها برداریم چه می‌شود؟

پاسخ: سیستم، بیانِ نامتغیر با زمان دارد. یعنی چگونگیِ تغییر از زمانی به زمانِ دیگر، با خودِ زمان، ثابت است. چگونگیِ تغییر، فقط به حالت و ورودی بستگی دارد و نه به زمان! در واقع مهم نیست در چه زمانی هستید، بلکه مهم است که در کجا هستید(در چه حالتی و ورودی هستید) آنگاه، حالت به نحوِ مشخصی تغییر خواهد نمود به حالت بعدی!

$$x(n+1)=A\,x(n)+B\,u(n) \quad , \quad y(n)=C\,x(n)+D\,u(n)$$

$$\dot{x}=A\,x(t)+B\,u(t) \quad , \quad y(t)=C\,x(t)+D\,u(t)$$

قبلاً نیز اشاره شد که با کنار هم گذاردنِ سیستم‌هایِ خطیِ ریاضی، می‌توان سیستم‌هایِ مفصل‌ترِ ریاضیِ خطی نیز ساخت. مثلاً در زمان‌پیوسته، با سیستم‌هایِ ساده و ابتدایی مانندِ انتگرال‌گیر، سرعت‌گیر، ضرب در عدد و جمع سیگنال‌ها، می‌توان چنین نمود و در زمان‌گسسته با سیستم‌هایِ اولیهٔ یک‌گام پیش‌انداز، یک‌گام پس‌انداز، ضرب در عدد و جمع سیگنال‌ها! . حال اگر دقت کنید، در عباراتِ کلیِ بالا در واقع چنین اتفاقی رخ داده است و بسته به بُعدِ حالت، ورودی و خروجی، تعدادی از این سیستم‌هایِ سادهٔ خطی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا یک سیستمِ مفصل‌ترِ خطی ساخته شود.

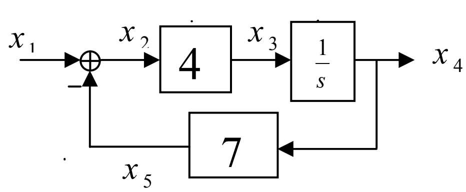
حال اگر در چنین ترکیبی، از یک سیگنالِ۱ به سیگنالِ دیگرِ۲ ، این نمادها را کنار هم قرار داده و ساده کنید، به یک عباراتی می‌رسید که نمایندهٔ بیانِ رابطهٔ بینِ چگونگیِ تغییرِ سیگنالِ ۱ با چگونگیِ تغییرِ سیگنالِ۲ است. به این عبارتی که یکجا چنین رابطه‌ای را بین آن دو بیان می‌کند، بطور چکیده، تابع تبدیلِ تغییری آن دو به یکدیگر، گویند. به نمونهٔ زیر در پرسش توجه کنید.

پرسش ۳۰: در سیستمِ ترکیبیِ زیر دو سیگنالِ x_1 و x_4 را در نظر گرفته، تابع تبدیلِ تغییریِ بینِ آندو را بدست آورید. همینطور بینِ x_1 و x_2 ، x_2 و x_4 .

پاسخ‌ها: $\frac{x_4}{x_1}(s)=\frac{\frac{4}{s}}{1+\frac{28}{s}}=\frac{4}{s+28}$

$$\frac{x_2}{x_1}(s)=\frac{1}{1+\frac{28}{s}}=\frac{s}{s+28}$$

$$\frac{x_4}{x_2}(s)=4\cdot\frac{1}{s}=\frac{4}{s}$$

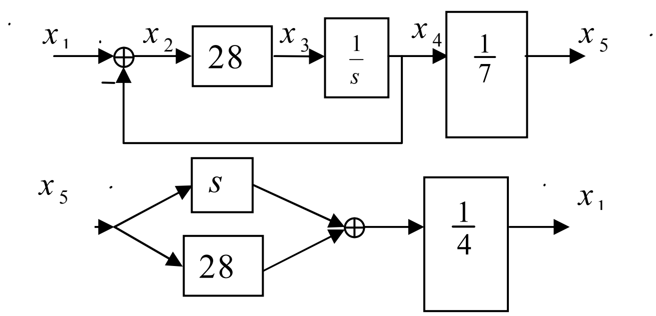


شکل ۵

آنچه می‌خواهیم از همین اول تأکید کنیم این است که سیستم‌هایِ ریاضیِ فرضیِ دیگری نیز می‌توانید بسازید که در آنها تابع تبدیلِ $\frac{4}{s+28}$ بین برخی متغیرها برقرار باشد ولی این تابع تبدیل حاصل از جزئیاتِ مشابهِ بالا نباشد! نکته اینجاست که با اینکه سیستم‌ها یکی نیستند ولی به لحاظِ فقط رابطهٔ بینِ آندو(ربطِ چگونگیِ تغییرِ یکی با دیگری)، هر دو سیستم یکسانند!

به عنوان یک نمونه، دو سیستمی را که در زیر بصورتِ بلوکی داده شده‌اند، در نظر بگیرید. در هر دویِ این‌ها نیز داریم:

$$\frac{x_5}{x_1}(s)=\frac{4}{s+28}$$



شکل ۶

یعنی از هر کدام از جزئیات که سعی کنیم از یکی به دیگری برسیم، نتیجه یکسان است. همین، تعبیرِ مهمِ تابع تبدیلِ تغییری را القا می‌کند. حال تابع تبدیلِ تغییری بینِ ورودی و خروجیِ آن عالَمِ خطیِ نامتغیر با زمان که بالاتر بصورتِ کلی آوردیم، پیش کشیده می‌شود.

پرسش ۳۱: آیا می‌توانید خودتان نشان دهید که این تابع تبدیل برایِ الگویِ تغییری در بالا آمدهٔ خطیِ نامتغیر با زمان، عبارت است از: $C(sI-A)^{-1}B+D$

این عبارت برایِ حالت کلیِ چند ورودی-چند خروجی(*MIMO*[۳۵]) بدست آمده و لذا ماتریسی از تابع تبدیل‌ها بینِ هر یک از متغیرهایِ ورودی با هر یک از متغیرهایِ خروجی خواهد داد. اگر تک ورودی-تک خروجی(*SISO*[۳۶]) باشد، آنگاه فقط یک تابع تبدیل نتیجه خواهد شد! توجه کنید که برایِ زمان‌گسسته فقط کافی است بجایِ s ، z بگذارید.

برایِ هر ترکیبی از عالَم‌هایِ خطیِ نامتغیر با زمان که به عالَمی پیچیده‌تر منجر می‌شود، نیز می‌توانید با انتخابِ متغیرهایِ حالتِ مناسب، آنها را بصورت تغییرِ حالتِ ماتریسی، بیان نمایید.

---

[۳۵] *Multi Input Multi Output*
[۳۶] *Single Input Single Output*

پرسش ۳۲: این انتخابِ متغیرهایِ حالتِ مناسب، چگونه است؟

پاسخ: کافی است هر یک از خروجیِ انتگرال‌گیر s^{-1} ها (یک گام پیش‌انداز z^{-1} ها) را به عنوانِ متغیر حالت بگیرید. سپس کافی است با توجه به اتصالات، ببینید که ورودیِ هر یک از انتگرال‌گیرها(یک گام پیش‌اندازها) چگونه از رویِ متغیرهایِ حالت و متغیرهایِ ورودی بدست می‌آید که به این ترتیب چگونگیِ تغییرِ هر یک از متغیرهایِ حالت معلوم می‌شود.

پرسش ۳۳: برایِ هر یک از سیستم‌هایِ آمده در دو شکلِ ۳ و ۴ ، یک معادلاتِ حالت بنویسید.

حال رسماً پرسشِ اساسیِ پیش آمده این است که یک تابع تبدیل برایِ چند گونه سیستم می‌تواند درست باشد. یا به عبارت بهتر

پرسش ۳۴: برایِ یک تابع تبدیل چند سیستمِ گوناگون می‌توان ارائه نمود؟

پاسخ : بی‌شمار! یعنی سیستم‌هایِ گوناگونِ بسیاری می‌توان ترتیب داد که تابع تبدیلِ یکسانی را برایِ دو متغیر بدست دهند. یا به زبانی که بالاتر نیز اشاره شد: روابطِ لطیفِ گوناگونی می‌توان ترتیب داد که همگی از یک و فقط یک نوع رابطهٔ بین ورودی و خروجی خبر می‌دهند.

ماتریسِ دلخواهِ معکوس‌پذیرِ T را در نظر بگیرید. آنگاه با تبدیلِ متغیرهای حالت بوسیلهٔ همین ماتریس می‌توان سیستمِ دیگری یافت که همان تابع تبدیل قبلی را بدهد. در ادامه اثبات این موضوع آمده است که آرایهٔ z ، متغیرهای حالت جدید را معرفی می‌کند. ضمناً علامت $'$ برای نمایش ماتریس‌های سیستمِ جدید بکار رفته است.

$$\underline{z} = T\underline{x} \mapsto T^{-1}\underline{\dot{z}} = AT^{-1}\underline{z} + \underline{b}u \quad , \quad y = \underline{c}^T T^{-1}\underline{z} + du \mapsto$$

$$\underline{\dot{z}} = TAT^{-1}\underline{z} + T\underline{b}u \quad , \quad y = \underline{c}^T T^{-1}\underline{z} + du \ \mapsto \quad A' = TAT^{-1} \ , \ \underline{b}' = T\underline{b} \ , \ \underline{c}'^T = \underline{c}^T T^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mapsto H'(s) &= \underline{c'}^T (sI - A')^{-1}\underline{b}' = \underline{c}^T T^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}T\underline{b} \\ &= \underline{c}^T[(sI - TAT^{-1})T]^{-1}\underline{b} = \underline{c}^T(sT - TA)^{-1}T\underline{b}\end{aligned}$$

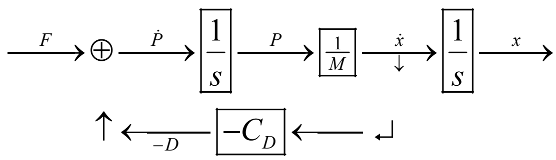
$$\mapsto H'(s) = \underline{c}^T[T^{-1}(sT - TA)]^{-1}\underline{b} = \underline{c}^T(sI - A)^{-1}\underline{b} = H(s)$$

در ادامه طیِ پرسش‌هایی موضوعِ بالا بهتر درک خواهد شد ان‌شاءَالله!

پرسش ۳۵: جسمی به جرم M را در نظر بگیرید که در سیالی (مانند هوا) در حال حرکت روی یک امتداد است و نیروی Fی نیز روی آن قابل اعمال است که آن را ورودی می‌گیرید. نیروی بین جسم و سیال، اصطکاکی است که متناسب با سرعت جسم است با ضریب C_D (این نیرو در علم آیرودینامیک معروف به نیروی *Drag* است). معادلاتِ حالت مناسبی ارائه دهید بطوریکه مکانِ جسم نیز در دست باشد و خروجی را مکان بگیرید.

$$\xrightarrow{F}\boxed{M}\xleftarrow[D]{}$$

پاسخ: با پذیرشِ ادبیاتِ مکانیکِ نیوتنی بدست می‌آید: $\dot{P}=F-D=F-C_D v\ ,\ v=\frac{1}{M}P$ که از آن نمایشِ بلوکی زیر حاصل می‌شود:



و چنانچه از نامگذاری‌هایِ مرسوم استفاده شود، داریم:

$$x_1 \triangleq P\ ,\ x_2 \triangleq x\ ,\ u_1 \triangleq F \quad \Big\} \mapsto \begin{cases} \dot{x}_1=-\dfrac{C_D}{M}x_1+u_1 \\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{M}x_1 \end{cases} \quad ,\quad y=x_2$$

پرسش ۳۶: چون آنچه در بالا بدست آمد خطی است، سیستم را به شکلِ ماتریسی در آورده و نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{C_D}{M} & 0\\ \dfrac{1}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}[u_1] \quad ,\quad y=[0\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

پرسش ۳۷: متغیرِ اولِ حالت را مجموعِ سرعت و مکان و متغیرِ دوم را تفاضل سرعت از مکان، انتخاب نموده و ماتریس‌های مربوط به سیستمِ جدید را بدست آورید.

پاسخ:

$$z_1=\tfrac{1}{M}x_1+x_2\,,\,z_2=-\tfrac{1}{M}x_1+x_2 \mapsto T=\begin{bmatrix}\frac{1}{M} & 1\\ -\frac{1}{M} & 1\end{bmatrix}\mapsto T^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{M}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{M}{2} & -\frac{M}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A'=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{M} & 1\\ -\frac{1}{M} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{C}{M} & 0\\ \frac{1}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{M}{2} & -\frac{M}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{M} & 1\\ -\frac{1}{M} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{C}{2} & \frac{C}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{C}{2M}+\frac{1}{2} & \frac{C}{2M}-\frac{1}{2}\\ \frac{C}{2M}+\frac{1}{2} & -\frac{C}{2M}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}' = T\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 1 \\ -\frac{1}{M} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix},\ \underline{c}'^T = \underline{b}^T T^{-1} = [0\ 1]\begin{bmatrix} \frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

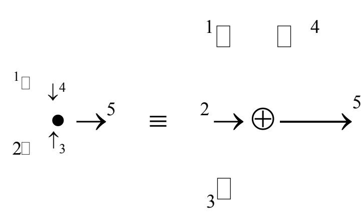
تاکنون رفتنِ از نمایشِ جبریِ معادلاتِ حالت به تابع تبدیل را آموختیم و ضمنِ آن، برایِ ما جا افتاد که بی‌شمار از اینها، می‌توانند هم تابع تبدیل باشند! همچنین الگوریتمی ترتیب داده شده است که از نمایشِ بلوکیِ خطی، هر چند هم که پیچیده باشد، ما را به تابع تبدیل می‌رساند. این الگوریتم به الگوریتمِ ماسون[۳۷] معروف گشته است. پیش از آنکه مسیرِ معکوسِ *از تابع تبدیل به این بی‌شمار* سیستم را بپردازیم، مناسب‌تر به نظر می‌رسد که ابتدا با این الگوریتم نیز آشنا شویم.

الگوریتمِ رسیدن از نمایشِ بلوکیِ خطی به تابع تبدیل(الگوریتمِ ماسون)

از هر نقطهٔ سیستم به نقطهٔ دیگر، اگر عمل جمع در بین نباشد، یک ضریب، همه چیز را نشان می‌دهد. البته این ضریب می‌تواند در ساده‌ترین شکل خود یک عدد حقیقی باشد ولی همانطور که قبلاً اشاره شد بطور کلی تابعی از s است که همان تابع تبدیل از نقطهٔ آغازین به نقطهٔ انتهایی است.

با این مقدمه می‌توان نتیجه گرفت که پیچیده‌ترین نمایش‌هایِ بلوکی نیز از ترکیب دو نمایشِ پایه‌ای که در شکل زیر نشان داده شده، تشکیل خواهند شد.

$$1 \xrightarrow{H} 2 \quad \equiv \quad 1 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow 2$$

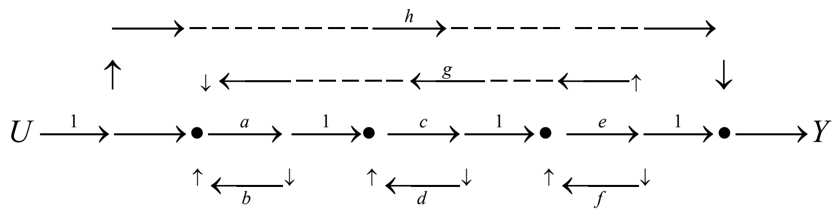


که اولی یعنی: $\quad$ *Signal 2=H×Signal 1*

و دومی یعنی: $\quad$ (*Signal 5*) = (*Signal 1*) + (*Signal 2*) + (*Signal 3*) + (*Signal 4*)

در ادامه به کمک یک نمونه، الگوریتمِ ماسون را قدم به قدم می‌آموزیم. در نمایشِ بلوکی زیر تابع تبدیل از U به Y را بدست می‌آوریم.

[۳۷] *mayson*



ابتدا همهٔ حلقه‌ها را بیابید. $ab \quad cd \quad ef \quad aceg$

سپس همهٔ مسیرهایی که به گونه‌ای از ورودی به خروجی می‌روند را بیابید. $h \quad ace$

در ادامه ابتدا مخرجِ تابع تبدیل(Δ) را بدست می‌آوریم.

Δ=1-(مجموع تمام حلقه‌ها)+(مجموع حاصلضرب دو به دوی حلقه‌های بدون اشتراک)- (حاصلضرب سه به سهٔ حلقه‌هایی بدون اشتراک)+...

$$\Delta=1-(ab+cd+ef+aceg)+(abcd+abef+cdef)-(abcdef)$$

و سپس صورتِ تابع تبدیل را بدست می‌آوریم.

(حاصلضرب مسیر۱ و قسمتی از مخرج که همین مسیر از آن حذف شود)+(حاصلضرب مسیر۲ و قسمتی از مخرج که همین مسیر از آن حذف شود)+...

$$h(\Delta)+ace(1)$$

توجه کنید که با حذفِ مسیرِ h همهٔ Δ بدون دست خوردن باقی می‌ماند. برعکس با حذفِ مسیرِ ace از Δ ، هیچ چیزی جز 1 باقی نمی‌ماند. به این ترتیب برای تابع تبدیل مربوط داریم:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{h\Delta+ace}{\Delta}=h+\frac{ace}{1-(ab+cd+ef+aceg)+(abcd+abef+cdef)-(abcdef)}$$

پرسش ۳۸: تابع تبدیلِ همین نمایشِ بلوکیِ بالا را با بدست آوردنِ تابع تبدیل‌هایِ تکه تکه، بدست آورید.

از نگاهِ خبیر به نگاهِ لطیف

در عباراتِ کلی که در ابتدا پیش کشیده شد، دیدیم که چگونه با نگاهی لطیف(البته تحت شرایطی که بحث شد)، می‌توان به الگویِ ریاضیِ لطیفی از عالَم رسید. سپس دیدید که چگونه از این الگویِ لطیف می‌توانستیم به نگاهِ خبیری نیز دست یابیم که حاصلِ آن برایِ خطیِ نامتغیر با زمان، بسیار ساده شده و در تابع تبدیل خلاصه می‌شود. حال به روندِ معکوس می‌خواهیم بپردازیم که مثلاً چگونه می‌توان از یک بیانِ تابع تبدیلی به بیان‌هایِ لطیفِ فرضیِ گوناگونی رسید.

در روندِ معکوس فرض بر این است که فقط خبری از خروجی نسبت به ورودی در اختیار باشد و ما بخواهیم ببینیم، آیا اساساً می‌توان لطافتی به آن نسبت داد؟ به نظرم این بحث بسیار بدرد بخور است. در واقع گویی ما دسترسی به لطافت نداریم ولی می‌خواهیم بدانیم مرتبهٔ لطافت چقدر است. در واقع سعی داریم یک نگاهِ لطیفِ فرضی(تخیلی) بسازیم.

برایِ این منظور کافی است یک لحظهٔ دلخواهی را در نظر گرفته و از کسی که مدعی است سیستم را به لحاظِ ورودی-خروجی خبر دارد، بپرسید:

چه لازم داری تا خروجیِ همین لحظه را بدهی و از او بخواهید که زیادی نخواهد؟!

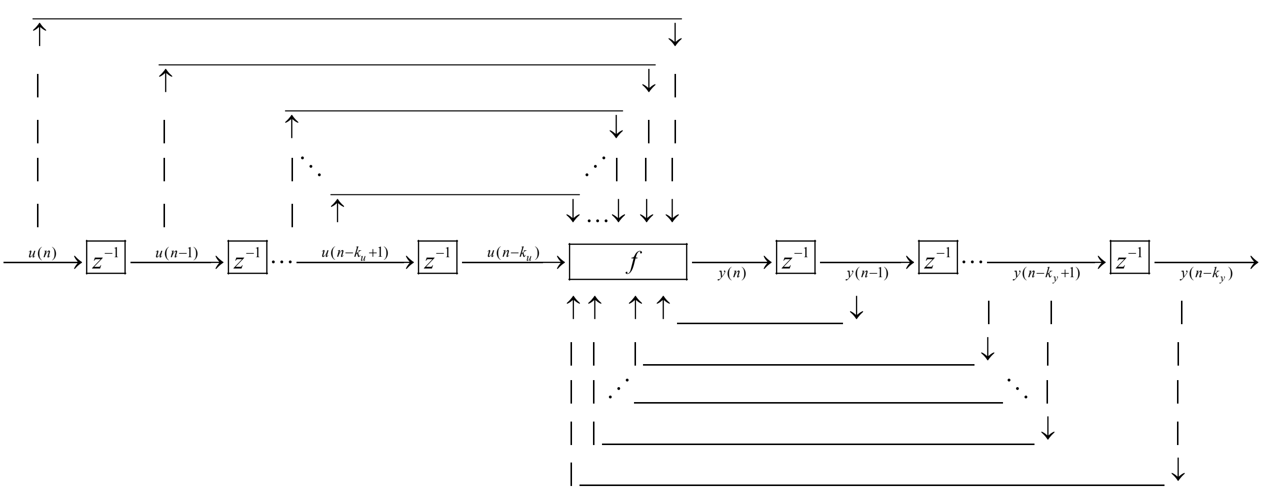
چنانچه درخواستِ او فقط و فقط ورودیِ همین لحظه باشد! آنگاه معلوم می‌شود که سیستم از مرتبهٔ صفر است. یعنی خروجیِ هر لحظهٔ دلخواه، فقط تابعی است از ورودیِ همان لحظه!

$$y(n)=f\left(u(n)\right) \quad , \quad u(n)\longrightarrow\boxed{f}\longrightarrow y(n)$$

چنانچه درخواستِ او، علاوه بر ورودیِ همین لحظه، ورودی یا خروجیِ گام‌هایِ پیشین نیز باشد، می‌گوییم سیستم مرتبه‌ای دارد به تعدادِ همان نیاز و یعنی :

$$y(n)=f\left(y\left(j\in n-\left[1,k_y\right]\right),u\left(l\in n-\left[0,k_u\right]\right)\right)$$

که این را **معادلهٔ تفاضلیِ بین ورودی و خروجی** گویند که در نمایشِ بلوکیِ زیر آمده است:



چنانچه ملاحظه می‌کنید در این حالتِ کلی، مرتبهٔ سیستم، k_y+k_u خواهد بود و لذا به همین تعداد پس‌انداز یا به تعبیرِ دیگر، حافظه لازم است.

البته در اینجا سیستم را سببی فرض کرده‌ایم و درخواستی نسبت به ورودی‌هایِ آینده، در نظر گرفته نشده است. اگر چنین درخواستهایی نیز باشد، مرتبهٔ سیستم تغییر نمی‌کند و اصطلاحاً گفته می‌شود که سیستم، ناسببی است و به همین تعداد پیش‌انداز لازم خواهد بود.

سیستم‌هایِ یک تابع تبدیل

حال در ادامه می‌خواهیم با در دست داشتنِ یک تابع تبدیل، از بی‌شمار سیستم‌هایِ هم تابع تبدیل، تعدادی را معرفی کنیم. قبل از هر چیز متذکر می‌شویم که تابع تبدیل‌هایی را می‌گیریم که درجهٔ صورتِ آنها کوچکتر از درجهٔ مخرجشان است. هنگامی‌که درجهٔ صورت با مخرج برابر یا حتی از آن بزرگتر است، را نیز به حالتی که درجهٔ صورت از مخرج حداقل یکی کمتر است، تبدیل می‌کنیم. در زیر چگونگی این کار در حالت کلی برای تابع تبدیلِ درجهٔ ۳ نشان داده شده است.

$$\frac{d_3z^3+d_2z^2+d_1z+d_0}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}=d_3+\frac{(d_2-d_3a_2)z^2+(d_1-d_3a_1)z+(d_0-d_3a_0)}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}=b_0+\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}$$

توجه کنید که d_3 در اینجا همان D در معادلهٔ حالتِ کلی است و همین جا معلوم میشود که ناصفریِ این ضریب، یعنی برابر بودنِ درجهٔ صورت و مخرجِ تابع تبدیل، و صفر بودنِ آن یعنی درجهٔ صورتِ تابع تبدیل از مخرج آن حداقل یکی کمتر است. به همین ترتیب می‌توان سیستمِ مناسبی نیز برایِ آنهایی که درجهٔ صورت از مخرج بزرگتر (ناسببی) است نیز بدست داد. در چنین صورتی تنها چیزی که رخ می‌دهد این است که ضرایبِ D_1 و ... نیز ممکن است حسبِ مرتبه‌ای که بزرگتراند، ناصفر شوند.

با توضیحاتی که داده شد در ادامه، سیستم‌هایِ ویژه‌ای را برای تابع تبدیلِ کلیِ درجهٔ ۳یِ زیر معرفی می‌کنیم و منظورِ ما فقط آشنایی با آنهاست و مزایا و معایب آنها مورد بررسی قرار نمی‌گیرند.

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=H(z)=\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}$$

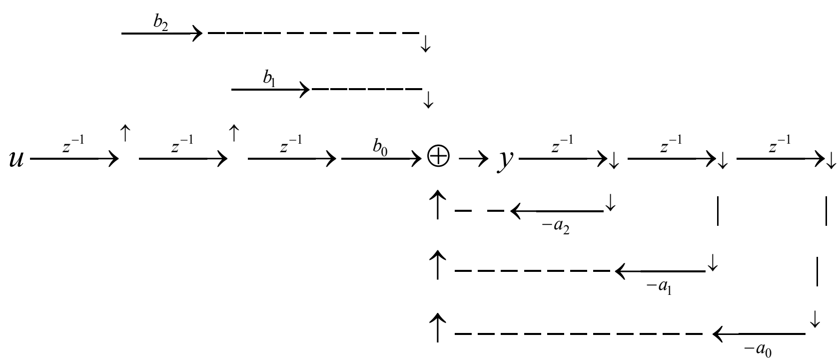
سیستم‌هایِ کانونی

بیایید ابتدا صورت و مخرج را به z^3 تقسیم کنیم تا پس‌اندازها(انتگرال‌گیرها) از مخفی‌گاهِ خود بیرون آیند.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \frac{b_2 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}}{1 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2} + a_0 z^{-3}}$$

حال بیایید ابتدایی‌ترین سیستم یا همان معادلهٔ تفاضلیِ ورودی-خروجی را از طرفین- وسطین بدست آوریم.

$$y = b_2\left(uz^{-1}\right) + b_1\left(uz^{-1}z^{-1}\right) + b_0\left(uz^{-1}z^{-1}z^{-1}\right) - a_2\left(yz^{-1}\right) - a_1\left(yz^{-1}z^{-1}\right) - a_0\left(yz^{-1}z^{-1}z^{-1}\right)$$



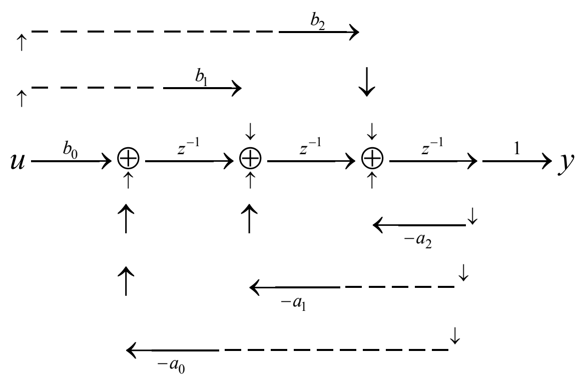
که این کاملاً مشابهِ همان صورتِ کلی‌ای است که کمی بالاتر آمد و فقط در اینجا، تابعِ f خطیِ نامتغیر با زمان است. حال اگر در ساده‌ترین انتخاب، خروجی‌هایِ پس‌انداز(z^{-1})ها را متغیرهایِ حالت بگیریم، ۶ تا خواهند شد و معادلاتِ حالت، بصورتِ ماتریسیِ زیر در خواهند آمد.

$$\begin{pmatrix} x_{1(+1)} \\ x_{2(+1)} \\ x_{3(+1)} \\ x_{4(+1)} \\ x_{5(+1)} \\ x_{6(+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \\ x_{4(0)} \\ x_{5(0)} \\ x_{6(0)} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \\ x_{4(0)} \\ x_{5(0)} \\ x_{6(0)} \end{pmatrix}$$

ولی حقیقت این است که تعدادِ متغیرهایِ حالتِ گرفته شده در اینجا که خطی و نامتغیر با زمان هستیم، زیادتر از نیاز است و می‌توان با انتخاب‌هایِ مناسبِ دیگر، دید که ۳تا کافی است. با انتخاب‌هایِ مناسبِ فراوانی می‌توان

این حقیقت را دید، ولی ما در اینجا با یکی از ساده‌ترین و شاید واضح‌ترینِ آنها شروع می‌کنیم و مابقی را از الگوریتمِ ماسون کمک خواهیم گرفت. کافی است عبارتِ معادلهٔ تفاضلیِ بالا را این‌بار بصورتِ زیر مرتب کنیم:

$$y=\left(\left(b_2u-a_2y\right)+\left(\left(b_1u-a_1y\right)+\left(b_0u-a_0y\right)z^{-1}\right)z^{-1}\right)z^{-1}$$



که معادلاتِ حالتِ زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} x_{1(+1)} \\ x_{2(+1)} \\ x_{3(+1)} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u \quad , \quad y_{(0)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \end{pmatrix}$$

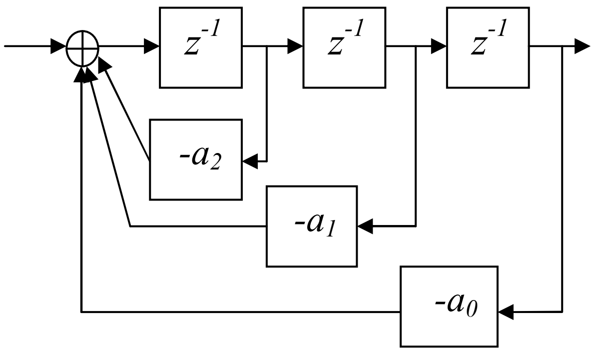
بیان‌هایی مانندِ بالا که تعدادِ متغیرهایِ حالت بیش از نیاز انتخاب نمی‌شوند، بیان‌هایِ کمینه‌شده[۳۸] و برعکس مانندِ قبلی را ناکمینه‌شده می‌نامند.

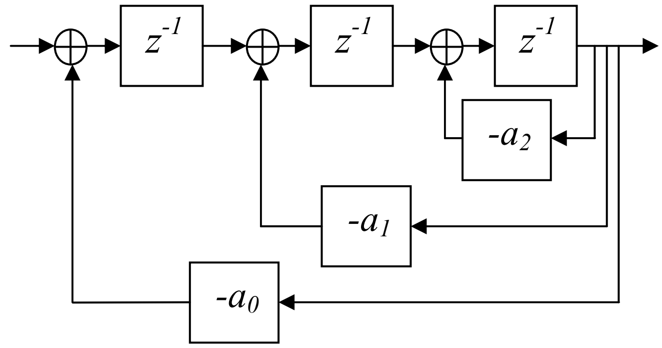
پرسش ۳۹: هر دو سیستمِ بالاتر آمده، را در شبیه‌سازیِ آماده شده در پرسشِ ۴ و ۵ اجرا نموده و برایِ مثلاً ورودیِ پله یکبار با شرایطِ اولیهٔ: خروجیِ صفر در زمان صفر و پیش از آن، و بارِ دیگر با شرایط اولیهٔ: خروجیِ ۲ در زمانِ صفر و صفر پیش از آن، اجرا نمایید. آیا پاسخ‌هایِ خروجی در هر دو سیستم یکسان است؟(همهٔ ضرایب را ۱ بگیرید!)

سیستمِ کمینه‌شدهٔ اخیر را کانونیِ کنترل‌پذیر نامیده‌اند. برایِ رسیدن به شکل‌هایِ کانونیِ دیگر از الگوریتمِ ماسون کمک می‌گیریم. برایِ این منظور به قاعدهٔ ماسون برای تعیین مخرج تابع تبدیل دقت کنید. توجه کنید، به شکلِ z^{-1}دارِ تابع‌تبدیل! . ببینید که عدد ۱ در مخرجی که الگوریتمِ ماسون دارد، هم‌اکنون حضور دارد و فقط کافی است سه حلقهٔ اشتراک دار بگونه‌ای بسازیم که سه عبارتِ دیگرِ مخرج را نتیجه دهند. حال ببینید آیا نمایش‌هایِ زیر، ساده‌ترین راه نیستند؟

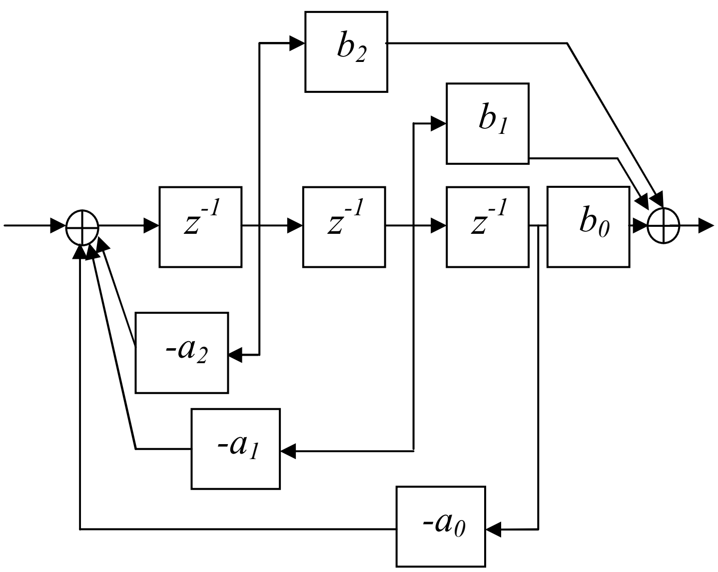
---

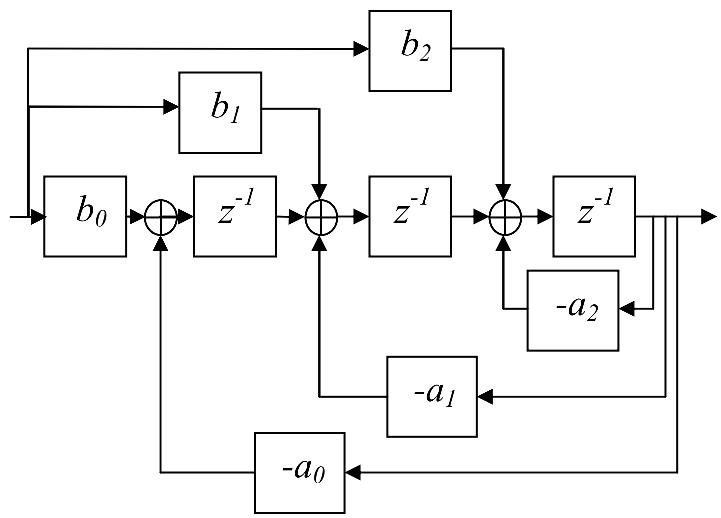
۳۸ *Minimal*





حال سعی کنید صورتِ تابع تبدیل را نیز بسازید. ساده‌ترین راه این است که سه مسیر از ورودی به خروجی بسازیم که اولاً هر یک، یکی از سه عبارتِ صورت را بسازند و ضمناً با حذف هر یک از Δ(مخرج)، جز عددِ ۱ چیزی باقی نماند، یعنی همهٔ حلقه‌ها شکسته شده و از بین بروند. این موضوع برای هر یکی از دو نمایشِ بالا، به دو صورتِ زیر ممکن است:





یکی از این دو سیستم را پیشتر آشنا شدید. در سیستمِ سمتِ چپ، چنانچه دقت کنید، پیش‌اندازِ (سرعتِ) هر حالتی، خود، یک حالت دیگر است تا آخرینِ‌شان که پیش‌اندازش(سرعتش)، ترکیب خطی از همهٔ متغیرهایِ حالت و ورودی است که ضرایب آن نیز از مخرجِ تابع تبدیل بدست آمده‌اند. بدلیل همین خواص، این را نرمال نیز نامیده‌اند.

پرسش ۴۰: آیا ماتریس‌هایِ معادلاتِ سیستمِ نرمال به شکل زیر است؟ همین سیستم را نیز شبیه‌سازی نموده و نتایج را با دو موردِ پیشین مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\ ,\ \underline{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ ,\ \underline{c}^T=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2\end{bmatrix}$$

پرسش ۴۱: به نظرم دو سیستمِ کانونیِ دیگر نیز می‌توان معرفی نمود. آیا می‌توانید آنها را نیز بدست آورده و هم بصورتِ بلوکی و هم ماتریسی نمایش دهید؟ مثلاً مخرج را مشابهِ سمتِ چپی بسازید ولی صورت را به شکلِ سمت راستی از ورودی تزریق کنید. البته این‌بار، عیناً با ضرایبِ صورت تزریق نمی‌گردد بلکه با ضرایبِ دیگری که بر حسبِ ضرایبِ صورت و مخرج بدست می‌دهید!

سیستمِ موازی و سیستم‌هایِ متوالی

یک حقیقتِ ریاضیِ بسیار مهم یعنی قضیهٔ اساسی جبر چند جمله‌ای‌ها، ما را به دو نوع سیستمِ دیگر (موازی و متوالی) رهنون میکند. این قضیه به ما گفته است که هر ریشهٔ چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، یا حقیقی است و یا در صورتِ مختلط بودن، مزدوج آن نیز یکی دیگر از ریشه هاست و البته به تعداد درجهٔ چند جمله‌ای نیز ریشه وجود دارد.

به این ترتیب مثلاً مخرجِ تابع تبدیل قابل تجزیه به عبارتهای درجهٔ اول و درجهٔ دوم که همگی ضرایب حقیقی دارند، خواهد بود. بعنوان نمونه برای مثالِ درجهٔ ۳ یکی از حالتهای زیر پیش خواهد آمد: ۱- هر سه ریشه حقیقی! ۲- یک ریشه حقیقی و دو ریشهٔ مختلط مزدوج!

حقیقتِ دیگرِ جبری که از آن نیز استفاده می‌نماییم این است که با کارهایِ جبریِ مناسب، همواره این امکان وجود دارد که کسرهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای هستند به مجموعی تجزیه شوند که مخرج آنها همین عوامل درجهٔ ۱ و ۲ هستند. این موضوع بطور دقیقتر با مثال زیر روشن می‌شود و ضمنِ آن، تجزیهٔ به کسرهایِ ساده(یا باختصار تجزیهٔ کسر) نیز آموخته می‌گردد.

حالت ۱- الف) تمام ریشه‌ها متمایز حقیقی

برای تابع تبدیل زیر تجزیهٔ کسر را اجرا می‌کنیم.

$$\frac{2s^2+s+1}{s(s+2)(s+1)}\equiv\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+1}$$

اجرای تجزیهٔ کسر یعنی بدست آوردن مقادیر حقیقی A و B و C . برای این منظور راهی که ما در اینجا پیشنهاد می‌کنیم یکی از راه‌هاست. بعنوان مثال بیایید برای یافتن A طرفین اتحاد بالا را در s ضرب کنیم و سپس بجای آن صفر بگذاریم خواهیم داشت:

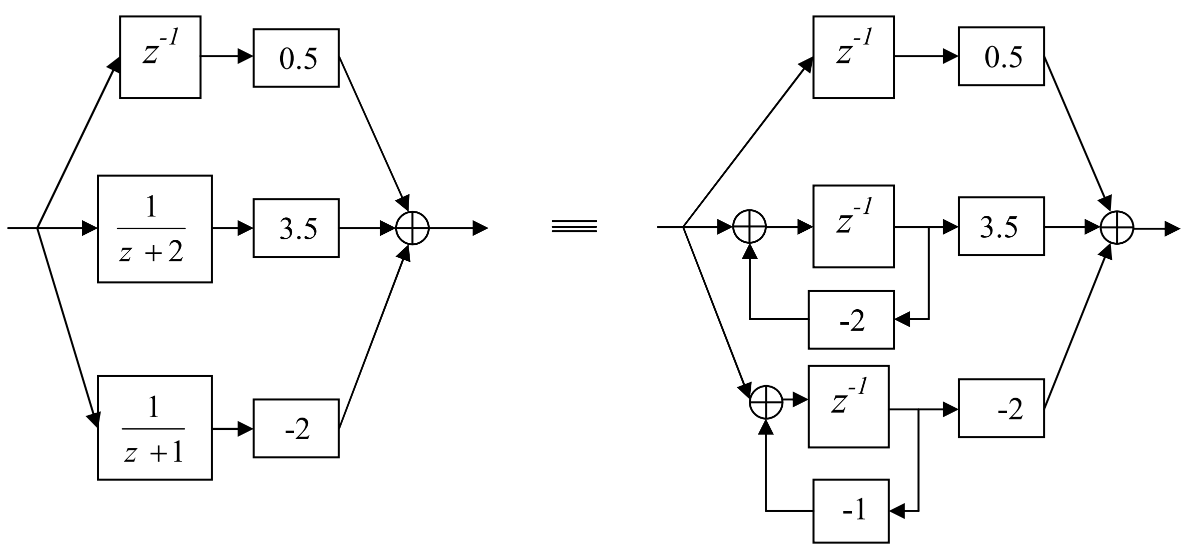
$$\frac{2s^2+s+1}{(s+2)(s+1)} \equiv A+\frac{Bs}{s+2}+\frac{Cs}{s+1} \xrightarrow{s=0} \frac{2(0^2)+(0)+1}{(0+2)(0+1)} = A+0+0 \mapsto A=\frac{1}{2}$$

همین کار را برای بقیه نیز عیناً تکرار میکنیم.

$$\frac{2s^2+s+1}{s(s+1)} \equiv \frac{A(s+2)}{s}+B+\frac{C(s+2)}{s+1} \xrightarrow{s=-2} \frac{2(-2)^2+(-2)+1}{(-2)(-2+1)} = B \mapsto B=\frac{7}{2}$$

$$\frac{2s^2+s+1}{s(s+1)} \equiv \frac{A(s+2)}{s}+\frac{B(s+1)}{s+2}+C \xrightarrow{s=-1} \frac{2(-1)^2+(-1)+1}{(-1)(-1+2)} = C \mapsto C=\frac{2}{-1}$$

به این ترتیب داریم:



هنگامی‌که شما یک تابع تبدیل را تجزیه به کسرهایِ جزئی می‌کنید، در واقع دارید سعی می‌کنید آن را بصورتِ مجموعی از جزئی‌ترین و یا ساده‌ترین زیرسیستم‌ها ببینید. در اینجا همهٔ این ساده‌ها دارایِ یک ورودی بوده که همان ورودیِ سیستم است ولی خروجی‌هایِ تک تکِ آنها باید با هم جمع شوند تا خروجیِ نهایی حاصل گردد.

پرسش ۴۲: آیا ماتریس‌هایِ مربوطه بصورتِ زیر خواهند بود؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \;,\; \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 3.5 & -2 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریسِ A قطری شده و اعضایِ قطر اصلیِ آن ریشه‌هایِ چندجمله‌ایِ مخرج یعنی قطب‌هایِ تابع تبدیلند که آنها را مودهایِ سیستم نیز می‌نامند.

پرسش ۴۳: آیا می‌توان بردارهایِ b و c را جابجا نمود؟ در این صورت، نمایشِ بلوکی چه تغییری می‌کند؟

پرسش ۴۴: آیا می‌توانید همین تابع تبدیل را با تحقق‌های کانونی محقق سازید. فقط ماتریسها را معرفی کنید.

حالت ۱ – ب) دو ریشهٔ تکراری

برای تابع تبدیل زیر تجزیهٔ کسر را انجام می‌دهیم.

$$\frac{2s^2+s+1}{s(s+2)^2} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)}$$

برای یافتن A و B همان کار قبلی جواب می‌دهد:

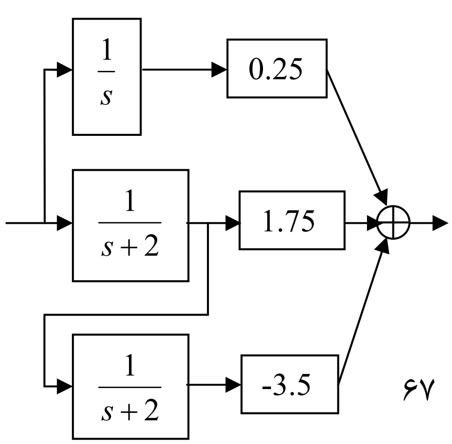
$$\frac{2s^2+s+1}{(s+2)^2} \equiv \frac{A}{s} + \frac{Bs}{(s+2)^2} + \frac{Cs}{(s+2)} \xrightarrow{s=0} A = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2s^2+s+1}{s} \equiv \frac{A(s+2)^2}{s} + B + C(s+2) \xrightarrow{s=-2} B = -\frac{7}{2}$$

ولی برای یافتنِ C ابتدایی ترین راه را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{C}{(s+2)} \equiv \frac{2s^2+s+1}{s(s+2)^2} - \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^2}\right) \mapsto C = \frac{7}{4}$$

به این ترتیب داریم:



و ماتریس‌هایِ زیر را نتیجه خواهد داد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} , \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0.25 & 1.75 & -3.5 \end{bmatrix}$$

حالت ۱-ج) سه ریشهٔ تکراری

برای تابع تبدیل زیر تجزیهٔ کسر را انجام می‌دهیم.

$$\frac{2s^2+s+1}{(s+1)^3} \equiv \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

برای یافتن C همان کار قبلی جواب می‌دهد

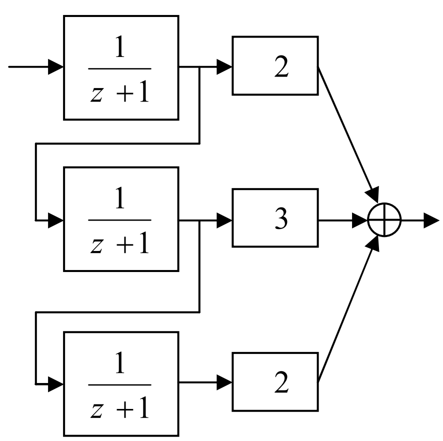
$$2s^2+s+1 \equiv A(s+1)^2 + B(s+1) + C \xrightarrow{s=-1} 2(-1)^2 + (-1) + 1 = C \mapsto C = 2$$

ولی برای یافتن بقیه، ابتدایی ترین راه را انتخاب می‌کنیم.

$$2s^2+s+1-2 = 2s^2+s-1 = (s+1)(2s-1) \mapsto 2s-1 \equiv A(s+1) + B \xrightarrow{s=-1} 2(-1)-1 = B \mapsto B = -3$$

$$2s-1+3 = 2s+2 \mapsto A = 2$$

به این ترتیب داریم:



و ماتریس‌هایِ زیر را نتیجه خواهد داد.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ \underline{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \underline{c}^T=\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

توجه کنید که باز هم، ماتریس A قطری شده و اعضای قطر آن همچنان قطبهای تابع تبدیلند و البته این بار در قسمت مودِ مکرر، ماتریس سه در سهٔ پایین مثلثی بوجود آمده و در عوض، عضوهای انتهایی بردار b صفر شده-اند.

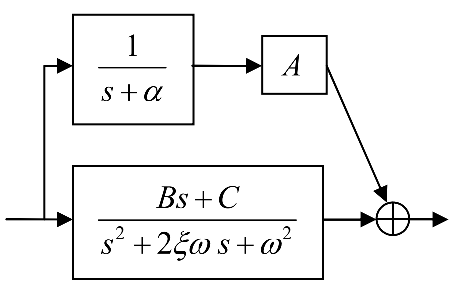
پرسش ۴۵: همین تابع تبدیل را با تحقق‌های کانونی محقق سازید. فقط ماتریسها را معرفی کنید.

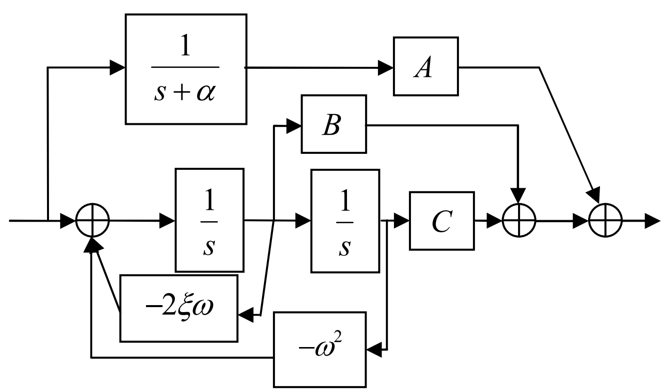
حالت ۲- یک ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ مختلط مزدوج

تابع تبدیل زیر را با یک سیستمِ موازی محقق می‌سازیم. توجه کنید که اگر بخواهیم فقط با اعداد حقیقی سر و کار داشته باشیم این‌بار تجزیهٔ کسر در حالت کلی بصورت زیر خواهد بود.

$$\frac{2s^2+s+1}{(s+\alpha)(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)}\equiv\frac{A}{s+\alpha}+\frac{Bs+C}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$$

که پس از یافتن A ، B و C، سیستمِ خواسته شده، بصورت زیر می‌تواند باشد:





و ماتریسهای تحقق زیر نتیجه خواهد شد.

$$A=\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 0\\ 0 & -2\xi\omega & -\omega^2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \underline{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \underline{c}^T=\begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریس A کاملاً قطری نشده چون قطبهای مختلط، ملزم بوده‌اند خود را با ضرایب حقیقی مربوطه به نمایش گذارند. ضمناً برای تحققِ مودهای مختلط از تحققِ کانونی نرمال استفاده شده است.

پرسش ۴۶: همین تابع تبدیل را با تحقق‌های کانونی محقق سازید. فقط ماتریسها را معرفی کنید.

به منظورِ آشناییِ بیشتر، برایِ تابع تبدیل زیر تجزیهٔ کسر را بطور کامل انجام می‌دهیم.

$$\frac{7s^2+100s+500}{(s+2)(s^2+20s+200)} \equiv \frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+20s+200} \equiv \frac{2}{s+2}+\frac{D}{s+10\sqrt{2}e^{i135^o}}+\frac{D^*}{s-10\sqrt{2}e^{-i135^o}}$$

$$z=10\sqrt{2}e^{i135^o} \quad \mapsto \quad D=\frac{7z^2+100z+500}{(z+2)(z-z^*)}=2.5+i0$$

که چنانچه دقت کنید همواره برای B و C بر حسب D داریم:

$$B=D+D^*=2\operatorname{Re}\{D\}\ ,\ C=-Dz^*-D^*z=-2\operatorname{Re}\{Dz^*\} \mapsto B=5\ ,\ C=50 \mapsto$$

$$\frac{7s^2+100s+500}{(s+2)(s^2+20s+200)} \equiv \frac{2}{s+2}+\frac{2.5}{s-10\sqrt{2}e^{i135^o}}+\frac{2.5}{s-10\sqrt{2e^{i135^o}}} \equiv \frac{2}{s+2}+\frac{5(s+10)}{s^2+20s+200}$$

برایِ آشنایی با **سیستم‌هایِ متوالی(سری)** کافی است توجه کنید که: همواره می‌توان چندجمله‌ای‌هایِ صورت و مخرج را به ساده‌ترین عباراتِ مرتبهٔ اول تجزیه نمود. لذا می‌توان تابع تبدیل را فقط با مرتب کردن‌هایِ گوناگون، بصورتِ حاصلضربِ تعدادی زیرسیستم‌هایِ سادهٔ مرتبهٔ اول یا دوم دید که خروجیِ هر یک، ورودیِ دیگری است. فقط ورودیِ اولی و خروجیِ آخری، به ترتیب، ورودی و خروجیِ سیستمِ اصلی خواهند بود.

پرسش ۴۷: برایِ تابع تبدیلِ حالتِ (۱ ج) و تابع تبدیلِ $\frac{s+1}{(0.2s+1)(3s+6)}$ ، سیستمِ متوالی ارائه کنید.

بیانِ سیستم با نگاهِ رنگی تا تابع تبدیلِ رنگی(طیفی)

دوباره یادآوری می‌کنیم که وقتی می‌گوییم سیستمی که در آن سیگنال‌هایِ از x_1 تا x_m هستند را در نظر بگیرید، منظورمان این است که بین آنها رابطه‌ای حُکم می‌کند! لذا وقتی کسی بخواهد با نگاهِ طیفی بیانی داشته باشد، لابد انتظار داریم از رابطهٔ بینِ طیفِ آنها، گفتگویِ دقیقی صورت پذیرد. مثلاً انتظار داریم بگوید اگر طیفِ x_1 چنین باشد آنگاه طیفِ x_k چنان خواهد بود. می‌بینید که تنوع بسیاری می‌تواند باشد. در پاسخ به پرسشِ زیر چند نمونه را می‌آوریم.

پرسش ۴۸: سیستم‌هایی ارائه کنید که با نگاهِ طیفی ویژگیِ آنها را بیان می‌کنید.

پاسخ: سیستمی در نظر بگیرید که فقط دو سیگنال دارد و مثلاً طیفِ اولی هر چه باشد، طیفِ دومی فقط به توانِ ۲ی آن است. یا مثلاً طیفِ دومی تا فرکانسِ ۱۰۰ مشابهِ طیفِ اولی بینِ ۱۰۰ تا ۲۰۰ است و در بقیه صفر است. یا مثلاً طیفِ دومی عبارتست از فقط یک سری ضربه در فرکانس‌هایِ صحیح که اندازهٔ آنها نیز برابر است با اندازهٔ طیفِ اولی در همان فرکانس‌ها و در مابقیِ فرکانس‌ها صفر است. خودتان نیز فکر کرده، نمونه‌هایی بیاورید.

از میان همهٔ این انواع می‌خواهیم به نوع بسیار خاص از سیستم‌هایِ ریاضیِ فرضی بپردازیم. اول اینکه خاصیتِ بسیار ویژه‌کنندهٔ خطی بودن را دارا باشند و علاوه بر آن یک ویژگیِ بسیار مهمِ دیگر نیز داشته باشند! و آن اینکه: اگر یکی از سیگنال‌ها فقط تک‌رنگِ پایه دارد، دیگر سیگنال‌ها نیز فقط از همان تکرنگ داشته باشند و بس! و حق ندارد تک‌رنگ‌های گوناگون با هم رابطه داشته باشند. می‌توان بطور خلاصه گفت که نسبت به رنگ‌هایِ پایه، یک‌رنگیِ سیستم حفظ می‌شود، هر چند می‌تواند نسبتِ آن، فرق داشته باشد.

به زبان ریاضی‌تر، یعنی اگر مثلاً x_k فقط دارایِ $e^{s_1 t}$ است، بقیهٔ x_iها نمی‌توانند رنگی(فرکانسی) بجز s_1 در خود داشته باشند. یعنی باید بصورتِ $C_i\, e^{s_1 t}$ قابل بیان باشند که C یک ضریبِ مختلطِ ثابت با زمان است که فقط می‌تواند اندازه و فازِ آن را تغییر دهد و بس!

پرسش ۴۹: آیا می‌توانید نشان دهید: چنانچه سیستمی علاوه بر خطی بودن، ویژگیِ نامتغیر بودن با زمان را نیز داشته باشد، آنگاه ناچار، ویژگیِ یک رنگی نسبت به تک‌رنگ‌هایِ پایه نیز برقرار است!؟

پس بنابه آنچه گذشت، در هر سیستمِ خطیِ نامتغیر با زمان(LTI[۳۹]) می‌توان گفت: بازایِ هر تک‌رنگی مانندِ s_1 ، بینِ هر دو سیگنالِ x_i و x_j یک نسبتِ معینی که با عددی مختلط قابل بیان است، وجود دارد. البته این نسبت بازایِ عوض شدنِ تک‌رنگ می‌تواند عوض شود که این یعنی : $\frac{X_i(s)}{X_j(s)} = H_{ij}(s) \quad , \quad \forall s$ که به آن تابع تبدیلِ طیفِ x_i به x_j گوییم.

پرسش ۵۰: آیا اگر کسی همهٔ تابع تبدیلِ طیف‌هایِ هر جفت سیگنالِ موجود در یک سیستم را بدهد، آن سیستم را بطور کامل بیان نموده است؟

[۳۹] *Linear Time Invarient*

پاسخ: اگر خطی باشد، آری! چراکه: اگر سیگنال‌ها، رنگ‌هایِ غیر از تک‌رنگ نیز داشته باشند، رابطهٔ آنها بوسیلهٔ تابع تبدیلِ طیفِ داده شدهٔ فی‌ما بین، بطور کامل بیان شده است. توجه کنید که طیفِ هر سیگنالِ دلخواه، بوسیلهٔ ترکیبِ خطیِ تک‌رنگ‌هایِ پایه داده می‌شود. و چون سیستم، خطی فرض شده است، همین ترکیب خطی ولی با رعایتِ نسبت‌هایِ داده شده در تابع تبدیلِ طیفِ مربوطه، در تمامیِ بقیهٔ سیگنال‌ها حفظ خواهد شد. لذاست که می‌گوییم چنانچه خطی بودن برقرار باشد، تابع تبدیل‌ها لازم و کافی خواهند بود برایِ بیان طیفیِ رابطه!

این را با نمایش‌هایِ ریاضی‌تر نیز می‌توان بیان نمود:

$$\forall s \quad , \quad \left(\cdots,\Phi_s,\cdots,H_{ij}\left(s\right)\Phi_s,\cdots\right)\in R_1 \qquad \left\{\Phi_s = e^{st}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی}}$$

$$\left(\cdots,\int_s X_i\left(s\right)\Phi_s ds,\cdots,\int_s \underbrace{X_i\left(s\right)H_{ij}\left(s\right)}_{X_j(s)}\Phi_s ds,\cdots\right)\in R_1$$

و لذا برای رنگ‌هایِ دلخواهِ $X_i\left(s\right)$ و $X_j\left(s\right)$ نیز، رابطه، با همان تابع تبدیلِ طیفِ $H_{ij}\left(s\right)$ پیشاپیش بیان شده است:

$$X_j\left(s\right)=X_i\left(s\right)H_{ij}\left(s\right)$$

ملاحظه کنید که تحتِ این شرایط، به چه آسانی و زیبایی، عالَم بیان می‌گردد. در واقع با یک تابع تبدیلِ طیفی تمامِ رابطهٔ بینِ دو سیگنال در سیستم، بیان می‌گردد. چنانچه هر یک از دو شرطِ ۱- خطی بودن یا همان حفظ جمع و ۲- حفظِ یک‌رنگی در رنگ‌هایِ پایه، برقرار نمانده و بهم ریزد، به هیچ وجه این سادگی و زیباییِ بیان، باقی نمی‌ماند.

کلمهٔ فیلتر دقیقاً هنگامی بکار می‌رود که می‌خواهیم از سیستم‌ها با نگرشِ طیفی و ورودی- خروجی گفتگو کنیم. فیلترهای خطی همان‌هایی هستند که بالا دربارهٔ تابع تبدیلِ آنها سخن رفت. در واقع فیلترهایِ خطی بینِ ورودی و خروجی، بازایِ هر فرکانسی، تضعیف یا تقویت نموده و شاید اختلافِ فازی ایجاد کنند. به همین دلیل رفتارِ آنها عموماً بصورتِ یک بهرهٔ مختلط در فرکانس‌های گوناگون بیان می‌شود که به آن پاسخ فرکانسیِ فیلتر گفته می‌شود.

این بهرهٔ مختلط به روش‌هایِ گوناگونی می‌تواند به نمایش گذارده شود. یکی اینکه اندازه و فاز، هر یک جداگانه، بر حسب فرکانس، رسم شوند. این بویژه اگر ۲۰ برابرِ لگاریتمِ اندازه(که به آن دسی‌بل db گفته می‌شود) بر حسبِ محور لگاریتمیِ فرکانس رسم شود، معروف است به نمایشِ بودیِ پاسخِ فرکانسی.

نمایشِ دیگر به این ترتیب است که تمامیِ این ضرایبِ مختلط را در صفحهٔ مختلط با افزایشِ فرکانس از صفر تا بالا رسم می‌کنند. در این نمایش، فرکانس دیده نمی‌شود و فقط بازایِ رشدِ فرکانس، میزان اندازه و اختلاف فازِ ایجاد شده توسط فیلتر یکجا در صفحهٔ مختلط دیده می‌شود. به این، نمایشِ قطبیِ پاسخ فرکانسی گویند.

رفتارشناسی

مستقل از دو نگاهِ تغییری یا طیفی، دو گونهٔ رفتارشناسی وجود دارد. یکی با توجه به لطافتِ موجود (رفتارشناسیِ لطیف یا میکروسکوپیِ عالَم یا رفتارشناسیِ حالت) و یکی هم فقط با توجه به خبری که از خروجی نسبت به ورودی می‌رسد(رفتارشناسیِ خبیر یا ماکروسکوپیِ عالَم یا رفتارشناسیِ ورودی–خروجی)!

در یکی، روابطِ موجود بینِ اجزا مهم است و در دیگری فقط رابطهٔ بینِ ورودی و خروجی مهم است. در یکی درون‌شناسی داریم و در دیگری بیرون‌شناسی. مثلاً با نگاهِ تغییریِ لطیف، برایِ ما مهم است که چگونگیِ تغییرِ حالت یا تحولِ حالت را بدانیم! درحالیکه برعکس در نگاهِ تغییریِ خبیر، تحول حالت برایِ ما اهمیت ندارد بلکه چگونگیِ تغییرِ خروجی بازایِ تغییرِ ورودی مهم است و جزئیات مربوط به درون، مهم نیستند.

هر قومی و گروهی یک سری روابط درون‌گروهی دارند که مناسباتِ داخلی و درونیِ آنها را مشخص می‌سازد و یک سری روابطِ بیرونی که مناسباتِ ایشان را با گروه‌ها و اقوامِ دیگر معین می‌کند. البته پر واضح است که مناسباتِ داخلی و خارجیِ یک قوم بطور جدی به یکدیگر گره خورده‌اند. اما بهرحال این دو، دو گونهٔ رفتارشناسی است.

یک متغیرِ ورودی، در درون نیز حضور دارد و شاید از مهمترین متغیرهایِ حالت هم هست ولی با این فرق که فرض می‌کنیم می‌تواند تغییرِ دلخواه و غیر وابسته به بقیهٔ متغیرهایِ حالت داشته باشد، درحالیکه متغیرهایِ حالت اینگونه نبوده و مستقل از بقیه، تغییرِ دلخواهی ندارند.

پس چون رویِ ورودی این فرض است، پس اگر کسی هم بخواهد از بیرون تأثیری رویِ این گروه بگذارد از طریقِ این متغیرهایِ ورودی می‌تواند. لذاست که از منظرِ رفتارشناسیِ بیرونی، فقط ورودی دیده می‌شود.

از همین منظر، متغیرهایِ خروجی نیز همهٔ متغیرهایِ حالت نیستند بلکه برخی از آنها یا ترکیبی از آنهایند که از نگاهِ بیرونی مورد توجه‌اند و نتیجهٔ عملیاتِ گروه‌اند و به خارج از گروه نمودی دارند و می‌توانند به دیگر اقوام وارد شوند. لذا دربارهٔ خروجی باید گفت که بشدت، بستگی دارد به نگاه‌کنندهٔ به این گروه، که چه چیزی برایِ او اهمیت دارد و از دیدگاهِ او خروجیِ این گروه محسوب می‌شود. واقعاً این بسیار ممکن است که در یک بینشی مثلاً به عالَمِ جوِ آسمان، کسی چگونگیِ باد(جهت و اندازه) برای‌اش مهم بوده و فقط به آن توجه کند و دیگری به میزانِ رطوبت‌اش توجه کند. لذا اولی خروجی را باد و دومی رطوبت می‌گیرد و به هیچکدام هم خرده‌ای نیست. اما فراموش نمی‌کنیم که مابقومِ همهٔ متغیرهایِ حالت را شامل می‌شود که متغیرهایِ خروجی یا یکی از آنهایند و یا بلافاصله از رویِ آنها در هر لحظه بدست می‌آیند.

در رفتارشناسیِ از بیرون ما بدنبالِ این هستیم که ببینیم، با یک نوع تغییری در ورودی چگونه تغییری در خروجی مشاهده می‌شود!؟ به همین دلیل است که یک نوع ورودی‌هایِ ویژه‌ای را در نظر گرفته و پاسخِ به آنها برایِ ما از اهمیتِ بالایی برخوردار می‌شود. در گزینشِ این ورودی‌هایِ ویژه، سعی می‌شود هر یک، نوعی ویژه از تغییر را در بر داشته باشند. مثلاً می‌گوییم پاسخِ پله‌اش چنین و چنان است! یا می‌گویید پاسخ ضربه‌اش اینگونه است.

پله از ورودی‌هایی است که به لحاظِ دیدِ عملی بسیار پر کاربردتر است چراکه یک نوع تغییرِ بسیار مهم و محسوس و اولیه را القا می‌کند و آن هم اینکه مدتی بسیار طولانی در مقداری بوده‌ایم و دفعتاً تغییری نموده و دوباره به مدت بسیار طولانی در مقدار جدید منتظر می‌مانیم. بطور خلاصه یعنی یک تغییرِ دفعی و سپس سرعتِ صفر!. در ورودیِ شیب اولاً تغییر دفعی نیست و ثانیاً ادامه‌دار است ولی با سرعتی ثابت! در ورودیِ سهمی شتاب ثابت است! و به همین ترتیب می‌توان ورودی‌هایِ استاندارد دیگر نیز در نظر گرفت.

در عالَم‌هایِ خطی و نامتغیر با زمان از رویِ یکی از این پاسخ‌ها می‌توان بقیه را بدست آورد و در واقع می‌توان از رویِ یکی به هر ورودیِ دلخواهِ دیگری نیز پاسخ را بدست آورد. این دقیقاً بدلیل همین دو ویژگی است. اما در غیر خطی و یا متغیر با زمان چنین نبوده و لذا رفتار شناسی از بیرون برایِ آنها به این سادگی پیش نمی‌رود که یک پاسخ پله بدست آورده و از رویِ ویژگی‌هایِ آن، کارِ رفتارشناسی از بیرون تمام شود. دربارهٔ رفتارشناسی از بیرون در حالت کلی کارهایِ زیادی انجام نشده است ولی برعکس در خطی و نامتغیر با زمان، به پاسِ تعبیرِ تابع‌تبدیلِ تغییری، تعابیرِ زیبایی برایِ شناخت رفتار از ورودی به خروجی بوجود آمده است.

البته نباید اینگونه حساب کنیم که رفتارشناسی در این نوعِ بسیار ویژه از عالَم‌ها (خطیِ نامتغیر با زمان) و مزایایِ آن، فقط محدود به آنها شده و در قسمتِ کلی، دیدی به ما نمی‌دهد. بلکه بسیاری از تعابیرِ آنجا در حالت کلی نیز مورد توجه قرار گرفته و از آن بهره‌مند می‌شویم.

تاکنون بخوبی دریافته‌اید که وقتی با نگاهِ طیفی گفتگو از رفتارِ یک تابع تبدیل می‌کنیم، با وقتی که با نگاهِ تغییری از رفتار، گفتگو می‌کنیم، متفاوت است. در نگاهِ طیفی می‌خواهیم ببینیم و بدانیم با یک رنگِ خاص در ورودی، خروجیِ تابع تبدیل، چه رنگی خواهد شد؟ لذاست که پاسخِ فرکانسی که در بالاتر بحث شد، بخوبی رفتارِ طیفیِ سیستم را معلوم کرده و نمایش می‌دهد.

اینکه سیستمی را سامان دهیم بگونه‌ای که ورودی و خروجی داشته و رفتارِ ورودی-خروجیِ آن شبیهِ تابع تبدیلِ موردِ نظری باشد و قصدمان فقط دیدن باشد، اصطلاحاً شبیه‌سازیِ آن تابع تبدیل گویند که نرم‌افزارِ *simulink* بصورتِ رقمی چنین کاری را می‌تواند انجام دهد.

اگر فقط قصد، شبیه‌سازی نبوده بلکه واقعاً بخواهد نقشی ایفا نموده و واقعاً رویِ ورودیِ خود اثر کرده و خروجی نیز در جایی دیگر استفاده شود، اصطلاحاً گفته می‌شود: تابع تبدیلِ مزبور بوسیلهٔ آن تجهیزات ساخته(سنتز) شده است. مثلاً وقتی بوسیلهٔ المان‌هایِ دوسری که دارایِ مقاومت و خازنی هستند سعی می‌کنید سیگنالِ ولتاژی را فیلتر کنید، می‌گوییم که شما فیلتر پایین‌گذری را بصورتِ الکتریکی ساخته‌اید. یا اگر بوسیلهٔ فنر و کمک‌فنر در خودرویی سعی دارید تا پستی و بلندی‌هایِ جاده کمتر به سرنشینان منتقل شود، شما دارید سعی می‌کنید فیلتری را بصورتِ مکانیکی بسازید. در این فرآیند، شما رفتاری را بصورتِ ریاضیِ فرضی مد نظر دارید و بخوبی به این رفتار واقفید و می‌دانید چنانچه چنین رفتاری در قسمتی از یک عالَم(سیستم) بوقوع بپیوندد، این نعمتی برایِ شماست. لذا با تکیه بر برخی مهارهایی که خداوند در آن عالَم، آنها را دراختیارِ شما قرار داده و شما پیشتر با آنها آشنا شده‌اید، در روندِ نیلِ به این نعمت قرار گرفته و امید دارید که از آن نعمت برخوردار شوید. توجه کنید که در چنین شرایطی ساختنِ رقمی در رایانه، نعمتش همان نعمتِ یک شبیه‌سازی است و نه بیشتر!.

آنچه گذشت در روندِ تسخیر است که در درس اول نیز اشاره شده بود. اما همانطور که در درس اول نیز اشاره شد، نعمتِ آشنایی با این الگوهایِ ریاضیِ فرضی فقط بصورتِ بالا نیست، بلکه در فرآیندِ شناسایی نیز هست. یعنی وقتی هم که دارید یک عالَمِ غیر تخیلی را مورد بررسی و تحقیق قرار می‌دهید و می‌بینید، به محضِ اینکه این دیدهٔ خود را به عدد رساندید(این فرآیند در درس اول شرح داده شد)، حال می‌توانید ببینید و

تفکر کنید به رفتارِ آن که آیا به کدامیک از الگوهایِ رفتاریِ ریاضیِ فرضی‌ای که شما از پیش می‌شناسید، می‌تواند برازش گردیده و با آن زبان و الگو بیان گردد. مثلاً وقتی دارید یک ترانزیستور را الگوسازیِ ریاضی می‌کنید بشدت از این نعمت سود می‌برید. مثلاً می‌گویید فلان رفتارش مانندِ یک مقاومت است و آن دیگری مانندِ خازن و این یکی مانندِ یک بهرۀ ولتاژ(منبع ولتاژ) و ... . سپس از کنار هم قرار دادنِ این الگوهایِ سادۀ ریاضی، الگویی برایِ آن عالَمِ جدید و نوی که در دستِ تحقیق داشته‌اید، ارائه می‌کنید. به بیانی خلاصه، در این فرآیند شما ابتدا رفتار را می‌بینید و آن را نزدیک به رفتاری از الگویِ ریاضی‌ای که از پیش با آن آشنا هستید، می‌یابید. سپس می‌گویید این رفتاری که می‌بینم می‌تواند با این الگویِ ریاضی بیان گردد.

اینکه از رویِ تابع تبدیل‌هایِ سیستم‌هایِ ریاضیِ خطی و نامتغیر با زمان، بتوان رفتارِ تغییری(مثلاً پاسخ پله) و رفتار طیفی(پاسخ فرکانسی) را محاسبه و رسم نمود، یک کار ریاضی است که لازم است با آن بخوبی آشنا شویم. در ادامه این کار برایِ تابع تبدیل‌هایِ خطی-کسری به خوبی بحث خواهد شد. اصطلاحاً از سیستم‌هایِ مرتبۀ صفر شروع و به مراتبِ بالاتر پیش می‌رویم. ولی چون همراهِ این دو رفتارشناسی، رفتارشناسیِ حالت را نیز می‌خواهیم بحث کنیم لذا لازم است دربارۀ این نوع رفتارشناسی نیز گفتگویِ مقدماتی داشته باشیم تا روندِ ادامۀ کار مشخص‌تر باشد.

سخنی مقدماتی دربارۀ درون‌شناسیِ عالَم‌ها با نگاهِ تغییری

همانگونه که بالاتر آمد، در اینجا هدف شناختِ روابطِ درونی یا همان تحول حالت است که بویژه در تابعِ f پنهان است. چون تغییر دادنِ ورودی که تغییراتِ آزادی هم می‌تواند داشته باشد، باعث خواهد شد که تغییراتی بازایِ آن تغییر، در تحولِ حالت پدیدار شود، و از تغییراتِ خود به خودی و وابستۀ متغیرهایِ حالت، غفلت گردد، لذا در این رفتارشناسی، ورودی را تغییر نمی‌دهند بلکه با ورودیِ ثابت کار پیش می‌رود تا تغییراتِ غیرِ آزاد خودشان را به نمایش گذارند.

به این ترتیب حالت‌هایِ شروع و چگونگیِ تحولِ پس از آن، مد نظر است بدون اینکه ورودی تغییر کند. گویا ورودی را به زور ثابت نگاه‌داشته‌ایم. از همین روست که حالت‌ها دو نوعِ کلی می‌شوند. یکی آنهاییکه چنانچه از آنها شروع شود، در ادامه هیچ تغییر و تحولی نخواهد بود و عالَم در سکون خواهد رفت و بقیه‌ای که برعکس چنانچه از آنها شروع شود، حتماً در ادامه تغییری رخ داده و از آنجا می‌رود.

اولی‌ها بدلیلِ اهمیتی که در تحلیل و رفتارشناسی دارند، نامِ ویژه‌ای گرفته‌اند: حالتِ **سکون** یا حالتِ **تعادلِ** عالَم[۴۰] که بصورتِ (x_e, u_e) می‌توان نشان داد. درون‌شناسی در ادامه به رفتارِ حولِ سکون(ها) می‌پردازد. به این ترتیب که بحث می‌کند که اگر از حولِ(همسایگیِ) آن(ها) شروع شود، چه می‌شود و چگونه تغییری پیدا می‌شود!؟ خوب توجه کنید که به لحاظِ ریاضی، هر دوی این موضوعات به رفتارِ f باز می‌گردد.

پرسش ۵۱: حالات یا نقاطِ سکون چگونه از رویِ f بدست می‌آیند؟ در گسسته و پیوسته جداگانه پاسخ دهید!

پرسش ۵۲: در زمان‌پیوسته با فرضِ تک‌متغیره بودنِ حالت و ورودی و $f(x,u)=x^2+u$ ، سکون(ها) را بیابید.

پرسش ۵۳: در ادامهٔ پرسشِ بالا و با فرضِ $u=-1$ و با توجه به f بطور کِیفی بگویید: از هر جایِ دیگر، جز سکون(ها) شروع گردد، حالت، چگونه تغییر خواهد نمود؟ منظورمان از کِیفی این است که مثلاً می‌گویید: نزدیک می‌شود به فلان یا دور می‌شود از بهمان! یا مثلاً بزرگی‌اش کم می‌شود یا زیاد می‌شود ولی نمی‌گویید چقدر نزدیک می‌شود یا چقدر دقیقاً زیاد می‌شود و یا با چه سرعتی نزدیک و دور می‌شود! . یادآوری: f سرعتِ x است! با کمکِ پرسشِ ۵، موضوع را شبیه‌سازی نموده و رفتارِ حالت را از شروع‌های گوناگون ببینید!

پرسش ۵۴: مشابهِ دو پرسشِ بالا با $f(x,u)=x+u$ انجام دهید.

حقیقت این است که تحلیل و تسلط به مفاهیمِ بنیادین در مرتبهٔ اولِ کلی و نه لزوماً خطی، کمکِ شایانِ توجهی در رفتارشناسیِ مراتبِ بالاتر خواهد نمود. بویژه که در مراتبِ بالاتر، کارِ ریاضی به این سادگی که در اینجا روشن است، پیش نمی‌رود.

وقتی در یک همسایگی(هر چند کوچک) از سکونی، هیچ سکونِ دیگری نباشد، اصطلاحاً به آن سکون، **منفرد**[۴۱] گفته می‌شود.

رفتارشناسی در اینجا بیشتر باز می‌گردد به داستانِ رفتار در همسایگیِ سکون‌ها که آیا به آنها نزدیک می‌شود؟ یا دور؟ یا در یک همسایگیِ محدودی می‌ماند و نه از حداکثری دورتر شده و نه از حداقلی نزدیک‌تر می‌گردد؟ پاسخِ به این پرسشِ بنیادین، موضوعی شده است به نامِ **پایداریِ** حالتِ تعادل؟

---

[۴۰] *Equibilirium state, point*

[۴۱] *Isolated state*

اگر بتوان به هر قدرِ دلخواهی نزدیک‌تر به سکون ماند، می‌گویند آن تعادل(سکون) پایدار است. که این را به زبان ریاضی‌تر چنین می‌گوییم: برایِ هر همسایگیِ دلخواهِ سکون، همسایگی‌ای برایِ شروع وجود دارد که چنانچه از آن‌جا شروع گردد مطمئن باشید که از آن همسایگیِ دلخواه، بیرون نمی‌رود.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \left\| x(t_0) - x_e \right\| < \varepsilon \Rightarrow \left\| x(t \ge t_0) - x_e \right\| < \delta$$

پایداریِ سکون بگونه‌ای که در این عبارت تعریف شد، تحمیل نمی‌کند که رفتار بگونه‌ای باشد که رفته رفته به سکون نزدیکتر هم بشود! بلکه فقط اطمینان می‌دهد که در فاصلهٔ δ باقی می‌ماند! حال چنانچه علاوه بر این بتوان مطمئن شد که به هر حال پس از گذرِ زمان، به هر میزان که بخواهیم، به سکون نزدیک‌تر نیز خواهیم شد، آنگاه می‌گوییم پایداری، **مجانبی** نیز هست. یعنی به سکون، رفته رفته، مجانب نیز می‌شود:

$$\left\| x(t \ge t_0) - x_e \right\| \to 0$$

پرسش ۵۵: دربارهٔ سکون‌هایِ پرسشِ ۳۳ و ۳۴، پایداری و ناپایداری و در صورتِ پایداری، مجانبی بودن را بررسی کنید. دربارهٔ سکون‌هایِ ۳۲ نیز دقیقاً بویژه درحالاتِ خاص اظهار نظر کنید.

پرسش ۵۶: آیا می‌توانید یک قاعدهٔ ساده برایِ مرتبهٔ اول پیدا کنید. راهنمایی: برایِ این منظور لازم است بدانید که همواره و نه فقط در مرتبهٔ اول می‌توان برایِ سادگیِ بیانِ ریاضی، مبدأِ دستگاهِ حالت را به سکونی که در حال بررسیِ آن هستیم، جابجا نمود. به این ترتیب سکون می‌شود مبدأِ مختصات! این کار چگونه انجام می‌گردد؟ اما به هرحال پس از این کار، حال اگر f در هر ربعِ مختصات باشد، شما براحتی می‌توانید دربارهٔ پایداری و مجانبی بودن و نبودن داوری کنید. چگونه؟

پاسخِ چگونگیِ جابجاییِ سکون به مبدأ: کافی است تغییرِ متغیرِ سادهٔ $w = u - u_e \quad , \quad z = x - x_e$ را اجرا کنید. ببینید که معادلاتِ حالت تغییرِ چندانی نخواهد نمود: $\dot{z} = f\left(z + x_e, w + u_e, t\right)$! به این ترتیب می‌توان تصور نمود که همواره سکونِ مورد بررسی در صفرِ مختصاتِ حالت و ورودیِ نظیرِ آن نیز در صفرِ مختصاتِ ورودی باشند. توجه کنید : در عباراتِ ریاضیِ بالا می‌توان بجایِ $\left\| x(t) - x_e \right\|$ از $\left\| z(t) \right\|$ استفاده نمود. در ادامه ما نیز سخن را بدون یادآوریِ این جابجایی، با همین فرض پیش می‌بریم!

پرسش ۵۷:آیا می‌توانید در حالتِ کلی بگویید اگر سکونی، پایدار نباشد چنانچه از نزدیکی‌اش شروع گردد، بالاخره، تغییرات، چگونه‌هایی ممکن است باشد؟

وقتی حالت چند متغیره باشد یعنی مرتبهٔ یک به بالا باشد، کارِ تحلیلِ ریاضی به آن سادگی که مثلاً در پرسشِ ۲۳ برایِ تک متغیره نتیجه‌گیری نمودید، نخواهد بود. چراکه f دیگر یک تابعِ تک مقداری نبوده بلکه آرایه‌ای از توابع است و رسمِ هر کدام نیز، برحسبِ یک متغیر نیست که بتواند به آن سادگی در صفحه رسم گردد و تصوری مانندِ ربعِ اول و سوم و یا دوم و چهارم معنی پیدا کند!

یکی از مهمترین راه‌کارهایی که پیش گرفته شده است، همین پرداختنِ به فاصله از سکون است و چگونگیِ تغییرِ این فاصله! که به این ترتیب حداقل بجایِ چندین تابعِ چند متغیره، به یک تابعِ چند متغیره خلاصه می‌شود. بیایید حال که فاصله از سکون برایِ ما مهم است، این رفتار را بیشتر بکاویم. بویژه توجه کنید که در تحلیل‌هایِ تاکنونِ بالا، از نزدیک و دور شدن سخن رفت ولی از سرعتِشان سخنی نگفتیم. به نظرم پیش از پرداختن به خطی‌هایِ نامتغیر با زمان، بررسیِ سرعتِ نزدیکی و یا دوری از سکون نیز بسیار راهگشاست.

کافی است یادآور شوید که: مربعِ فاصله از سکون(پس از جابجاییِ آن به مبدأ) و سرعتش بسادگی، خواهند بود:

$$\tfrac{1}{2}\left\|x(t)\right\|^2 = W(x) = \tfrac{1}{2}x^T x \rightarrow \dot{W} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}^T x + x^T \dot{x}\right) = x^T \dot{x} = x^T f(x,0,t)$$

و برایِ الگوهایِ نامتغیر با زمان، شناسهٔ t می‌افتد: $x^T f(x,0)$. توجه کنید که این کاملاً کلی است و W و سرعتش یک عدد است و نه یک آرایه از اعداد! و کارِ ما از یک تغییراتِ چند متغیرهٔ حالت به یک تغییرِ تک‌متغیرهٔ فاصله از سکون ترجمه شده است. البته بخوبی می‌دانیم که همهٔ اطلاعاتِ تغییرات در این تک‌متغیر نیست ولی اطلاعاتِ مهمی از آنها در آن است که شاید در عمل بیشتر مد نظر باشد.

پرسش ۵۸: تابعِ فاصله از سکون(ها) در مرتبهٔ اول را توجه نموده و ملاحظه کنید: آیا همان نتایجی که در پرسشِ ۲۳ برایِ پایداری و ناپایداری و مجانبی بدست آوردید، دوباره از این دیدگاه نیز قابل استنتاج است؟ آیا در اینجا با یک تعیینِ علامتِ ساده، کارِ داوری تمام نیست؟ راهنمایی: چنانچه دقت کنید اگر سرعتِ W در یک همسایگی از سکون، منفی باشد، پایداریِ مجانبی و اگر مثبت باشد، ناپایداری داریم و اگر صفر باشد، پایداریِ غیرِ مجانبی خواهیم داشت و در واقع، سکونِ مزبور، منفرد نیست! اینها را در شبیه‌سازی‌های خود نیز ببینید!

پرسش ۵۹: آیا در مراتبِ بالاتر نیز می‌توان به همین سادگی و با یک تعیینِ علامتِ سادهٔ تابعِ فاصله، کارِ داوری دربارهٔ پایداریِ حالتِ سکون را تمام کرد؟

پاسخ: خیر!!! در تک متغیره، فضایِ حالت، تک بعدی بود و همسایگی یک پاره‌خط بود، ولی مثلاً در دو متغیره چنین نبوده و فضا یک صفحه و همسایگی یک قرص است. حال این امکان وجود دارد که در تکه‌ای از

این قرص، علامت منفی ولی در قسمتِ دیگر مثبت باشد و معلوم نباشد که مسیرِ حالت در این قرص چگونه و به نفع کدامیک از مثبت یا منفی ادامه می‌یابد چراکه مسیر می‌تواند در این قرص از مثبت‌ها به منفی‌ها و برعکس جابجا نیز گردد.

پس چه کنیم تا بتوان دربارهٔ پایداری در حالتِ چند متغیره نیز به داوری‌ای رسید؟! در اینجا فقط اشاره می‌کنیم که می‌توان بجایِ تابعِ فاصله، این روشِ سادهٔ تعیین علامت را رویِ هر تابعِ دیگری شبیهِ فاصله، آزمود. نکتهٔ بسیار مهم این است که اگر حتی در یکی از این شبهِ‌فاصله‌ها علامتِ سرعتِ آن مثبت نبود، می‌توان پایداری را و اگر مطلقاً منفی بود، می‌توان پایداریِ مجانبی را نتیجه گرفت! ولی اسفا که همواره، یافتنِ چنین تابعِ شبهِ‌فاصلهٔ مناسبی، ساده نیست! این تابعی که ما نامِ شبهِ‌فاصله دادیم، کاندیدایِ لیاپانوف خوانده می‌شود. ویژگی آن نیز بسیار ساده است و فقط لازم است مانندِ فاصله، همواره در یک همسایگیِ سکون، مثبت باشد.

لذا اگر تابعِ مربعِ فاصله $x^T x$ را کاندید نمودیم ولی علامتِ سرعتش در جاهایی مثبت درآمد و در جاهایی منفی! می‌توان کاندیدهای دیگری را نیز آزمود. مثلاً $x^T P x$ که P یک نوع ماتریسِ مربعی است که برایِ هر x دلخواهی، مقدارِ این عبارت، مثبت در می‌آید[۴۲]. در بسیاری از مواردِ عالَم‌هایِ مکانیکی، چنانچه انرژی را کاندید کنید، موفق خواهید بود.

در ادامه پیش از پرداختنِ به خطیِ نامتغیر با زمانِ با مراتبِ بالا، فقط به یک مثالِ غیرخطیِ مرتبهٔ ۲ بسنده می‌کنیم. گفتگویِ بیشتر دربارهٔ درون‌شناسیِ مراتبِ بالایِ غیرِ خطیِ متغیر با زمان، بسیار شیرین است ولی کمی حوصله و وقتِ بیشتری می‌طلبد.

پرسش ۶۰: عالَمِ «یک جسمِ ۱ کیلویی که از طریقِ فنری به دیواری متصل است و رویِ سطحِ افقیِ با اصطکاکی است» را از جنبهٔ حرکتی در نظر بگیرید و فرض کنید ادبیاتِ مکانیکِ نیوتن را پذیرفته‌ایم و نیرویِ خارجی‌ای بر جرم نیز می‌تواند باشد که آن را ورودی می‌گیریم. نیرویِ عکس‌العملِ فنرِ با مقدارِ انحراف از صفراش خطی نبوده و فرض کنید تابعی فرد(f) از این انحراف است. نیرویِ اصطکاک نیز لزوماً خطی نبوده و تابعی فرد(g) از سرعتِ جسم است. ابتدا سعی کنید معادلاتِ مناسبی برایِ حرکتِ جسم بنویسید که در آن مکان و سرعت حضور داشته باشند. این را بصورتِ بلوکی نیز نمایش داده و در *simulink* شبیه‌سازی‌ای را برایِ آن آماده کنید. توابعِ لازم را به تناسب و به پیشنهادِ خودتان جاگذاری خواهید نمود. سکون(ها) را در صورتِ وجود با توجه به معادلاتِ خودتان و نامگذاری‌ای که برایِ متغیرهایِ حالت نموده‌اید، معرفی کنید(لطفاً برایِ یکسانیِ نوشتار، انحراف از تعادلِ فنر را x_2 و سرعتِ آن را x_1 نام‌گذاری کنید). همینطور تصورِ خودتان از شرایطی که در این سکون‌ها بر این عالَم می‌گذرد، شرح دهید. برایِ هر

[۴۲] به همین مناسبت، چنین ماتریسِ مربعی‌ای را مثبتِ مطلق نامیده‌اند.

یک از فرض‌هایی که می‌آید، رفتار را وقتی از غیرِ سکون شروع گردد، ابتدا پیش‌بینی کنید سپس با کمکِ شبیه‌سازی سعی کنید ببینید(هر یک از متغیرهایِ حالت بر حسبِ زمان در یک نمایش و متغیرهایِ حالت بر حسبِ هم در صفحهٔ حالت و بازایِ شرایطِ شروعِ گوناگون). الف) ورودی صفر، بدون اصطکاک و فنریتِ خطی با ضریبِ سختیِ ۱ و ۲ ، مقایسهٔ اثرِ افزایشِ سختی! ب) ورودی ۱ نیوتن و بقیه مانندِ الف. پ) همه چیز مانندِ الف ولی فنرِ غیرخطی مثلاً : $-x^3-x$. ت) همه چیز مانندِ ب ولی فنر مانندِ پ . ث) حال بدون فنریت و با اصطکاک، ولی همان شرایطِ گوناگونی که در بندهایِ پیشین با فنر انجام دادید با اصطکاک انجام داده و نتایج را گزارش کنید ولی اصطکاک غیرخطی را بگیرید. ج) هم فنریت و هم اصطکاک هستند! و یکبار هر دو را خطی و یکبار یکی را خطی و دیگری را غیرخطی و یکبار هر دو را غیرخطی و برایِ هر یک نیز با ورودیِ صفر و غیرِ صفر! چ) حال فنریت را خطی ولی اصطکاک را غیرخطیِ ایستایی در نظر بگیرید به این ترتیب که: وقتی سرعت صفر است می‌تواند هر مقداری بینِ منفی و مثبتِ ۱ واحد باشد و وقتی سرعت غیرصفر است، دارایِ مقدارِ مطلقِ واحد است و به سرعت بستگی ندارد! سعی کنید ابتدا سکون‌ها را معرفی کنید و سپس از دو راه رفتار را ببینید: یکی اینکه از معادلاتِ تغییری که دارید، زمان را حذف و معادلهٔ تغییریِ سرعت با مکان را بدست آورده و سپس آنرا حلِ تحلیلی نموده و مسیرِ حالت را در صفحهٔ حالت رسم کنید. دیگری اینکه با شبیه‌سازی داستان را مشاهده نموده و با اجراهایِ متنوعِ مناسب، مسیرهایِ حالتِ متنوعی را در صفحهٔ حالت رسم کنید.

فکر می‌کنم بحث‌هایِ کلی، کافی باشد و شاید بهتر است بقیهٔ موضوعات در نمونه‌هایی که از ساده تا پیچیده در رفتارشناسی مطرح می‌گردند، پرداخته شود. لذا در ادامه با پیش‌کشیدنِ تابع تبدیل‌هایِ مراتبِ گوناگون، به رفتارشناسیِ ۱- لطافت‌شناسیِ تغییری ۲- خَبَرشناسیِ تغییری و ۳- خَبَرشناسیِ رنگی ، خواهیم پرداخت. فقط ممکن است بپرسید که در لطافت‌شناسی از کدام سیستم برایِ آن تابع تبدیل بهره جوییم. پاسخ این است: هر کدام ساده‌تر باشد و دمِ دست‌تر! . ضمناً در تمامیِ موارد ابتدا کار را خودتان بدون هیچ کمکی از نرم‌افزارها و با پاسخ‌گویی به پرسش‌ها پیش ببرید. سپس با استفاده از نرم‌افزارها ببینید چگونه می‌توانید نتایج کارهایِ خودتان را بهتر به نمایش درآورید. **این ترتیبِ کار بسیار مهم‌تر از آن است که بتوانید تصور کنید و عدم رعایتِ آن، تباهیِ غیرقابلِ جبرانی بهمراه دارد!!!**

۱- تابع تبدیل مرتبهٔ صفر: بهرهٔ تنها k

۲- ساده‌ترین تابع تبدیلِ مرتبهٔ یک سببی:یک قطب در مبدأ: جمعگرِ تنها: $\frac{1}{s}$ ، و بهمراهِ بهرهٔ k

۳- ساده‌ترین تابع تبدیلِ ناسببی: یک صفر در مبدأ: سرعت‌گیرِ تنها: s ، و بهمراهِ بهرهٔ k

۴- تابع تبدیلِ مرتبهٔ یک با قطبِ سمتِ چپی: $a > 0$, $\frac{k'}{s+a} = \frac{ka}{s+a} = \frac{k}{\tau s+1}$

۵- تابع تبدیلِ مرتبهٔ یک ناسببیِ با صفرِ سمتِ چپی: $a > 0$, $s+a$

۶- تابع تبدیلِ مرتبهٔ یک با قطبِ سمتِ راستی: $a<0$, $\frac{k'}{s+a}=\frac{k}{\tau s+1}$

۷- تابع تبدیلِ ناسببی با صفرِ سمتِ راستی: $s+a$, $a<0$

۸- تابع تبدیلِ مرتبهٔ دو: دو قطبِ سادهٔ سمتِ چپی: $a_1,a_2>0$, $\frac{k'}{(s+a_1)(s+a_2)}=\frac{k}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

۹- تابع تبدیلِ مرتبهٔ دو: دو قطبِ سادهٔ سمتِ راستی: $a_1,a_2<0$, $\frac{k'}{(s+a_1)(s+a_2)}=\frac{k}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

۱۰- تابع تبدیلِ مرتبهٔ دو: دو قطبِ ساده در دو طرف: $a_2>0$, $a_1<0$, $\frac{k'}{(s+a_1)(s+a_2)}=\frac{k}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

۱۱- تابع تبدیل مرتبهٔ دو: یک قطب در مبدأ و دیگری سمتِ چپی: $a>0$, $\frac{k'}{s(s+a)}=\frac{k}{s(\tau s+1)}$

۱۲- تابع تبدیل مرتبهٔ دو: یک قطب در مبدأ و دیگری سمتِ راستی: $a<0$, $\frac{k'}{s(s+a)}=\frac{k}{s(\tau s+1)}$

۱۳- تابع تبدیل مرتبهٔ دو: قطبِ مکرر در مبدأ: $\frac{k}{s^2}$

۱۴- مرتبهٔ دوی زوج قطبِ مختلط: $a_{1,2}=-\alpha\pm j\beta=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, $\frac{k'}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{k}{\left(1/\omega_n^2\right)s^2+2\left(\xi/\omega_n\right)s+1}$

د ادامه پرسش‌های مناسبی می‌آیند که هر یک ویژگی‌هایِ رفتاری را پیش می‌کشند و لازم است در هر یک از موارد بالا به آنها پرداخته شود.

پرسش ۶۱: آیا سکونی هست؟ همه را معرفی کنید! آیا منفردند یا نامنفرد؟ برایِ نامنفردها ملاحظه کنید که زیرفضایِ سکون معرفی می‌کنید!

پرسش ۶۲: (در این پرسش برایِ سادگیِ گویش، فرض بر ورودیِ صفر و لذا سکونِ صفر است که در غیر اینصورت نیز با جابجایی ورودی و سکونِ غیر صفر به صفر عیناً همین تعابیر حفظ می‌شود!) آیا حالت(های) شروعی هست که در ادامه، حالت، همواره متناسب با آن بماند(از سیستمِ موازی الهام بگیرید)؟ درصورتِ وجودِ چنین حالت‌هایی، ضریبِ تناسبِ مربوطه چقدر است؟ به این حالت‌هایِ ویژه، بردارهایِ ویژهٔ ماتریسِ A و به ضریبِ تناسبِ مربوط به هر بردارِ ویژه، مقدارِ ویژهٔ ماتریسِ A گویند.

پرسش ۶۳: آیا می‌توانید دربارهٔ پایداریِ سکون(ها) داوری کنید؟ در صورت پایداری، آیا مجانبی است؟ و در صورتِ مجانبی بودن دربارهٔ سرعتِ میلِ به سکون چه می‌توانید بگویید؟

پرسش ۶۴: آیا اساساً پاسخ به هرِ ورودیِ کران‌داری مانندِ پله، کران‌دار است؟(پایداریِ رفتارِ خبری یا پایداریِ ورودی- خروجی)

پرسش ۶۵: پاسخِ پله چه ویژگیِ مانایی دارد و بهرهٔ آن چقدر است(بهرهٔ مانا و قضیهٔ مقدار مانا بشرطِ پایداری)؟ چه ویژگیِ پرشی دارد و بهرهٔ آن چقدر است(بهرهٔ پَرِش و قضیهٔ مقدارِ پَرِش)؟

پرسش ۶۶: سرعتِ پاسخ پله برایِ رسیدن به مقدارِ مانا، ثابت زمانی و ضریبِ میراییِ پاسخ و ارتباطِ آن با جایِ قطب(ها)؟

پرسش ۶۷: نوسانی بودنِ پاسخ تا رسیدن به مقدارِ مانا، ضریبِ میراییِ نوسانات و رابطهٔ آن با جایِ قطب(ها)؟

پرسش ۶۸: در چه فرکانس(های)ی پاسخ فرکانسی تغییر جدی می‌کند(فرکانس اصلی) و این(ها) چه ربطی به جایِ قطب‌ها یا صفرها دارد؟ پیش از آنها و پس از آنها رفتارِ اندازه و فاز چگونه است؟

پرسش ۶۹: رفتارِ فرکانسی بازایِ فرکانس‌هایِ بسیار کوچکتر از کوچکترین فرکانسِ اصلی(بهرهٔ dc) و بسیار بزرگتر از بزرگترین فرکانسِ اصلی(بهرهٔ فرکانس‌بالا) چگونه است و از رویِ تابع تبدیل چه می‌توانید بگویید؟ آیا می‌توانید بگویید که هر یک از رفتارهایِ بالا به چه رفتاری از تابع تبدیل‌هایِ اولیه‌تر و ساده‌تر(مانندِ بهرهٔ تنها، جمعگر یا سرعت‌گیرِ تنها و یا توان‌هایی از همین‌ها) شبیه است؟

در اینجا به نظرم مقدماتِ لازم برایِ درکِ آنچه در خطیِ نامتغیر با زمانِ چند متغیره، می‌گذرد، فراهم شده است، اِن شاءَ الله! . پرسش‌هایِ ادامه، به این موضوع، در شکلِ عمومی‌تر پرداخته است.

پرسش ۷۰: آیا اگر ماتریسِ A معکوس‌پذیر باشد، برایِ سکون می‌توان نوشت: $x_e = -A^{-1}Bu_e$ و از اینجا نتیجه گرفت که بازایِ هر ورودیِ دلخواهی می‌توان یک و فقط یک سکون داشت که از همین رابطه بدست می‌آید؟

پرسش ۷۱: اگر ماتریسِ A معکوس‌پذیر نباشد، چه؟ این، حلِ معادلهٔ $Ax = b = -Bu_e$ را زنده می‌کند!

پاسخ: کافی است توجه کنید که فقط هنگامی، ماتریسی، معکوس ندارد که حداقل یک مقدار ویژهٔ صفر داشته باشد! در اینصورت برایِ برخی مقادیرِ ورودی هیچ حالتِ سکونی یافت نمی‌شود و برعکس برایِ برخی دیگر، بی‌شمار حالتِ سکون بدست خواهد آمد و بجایِ یک نقطهٔ سکون یک زیرفضایِ سکون وجود دارد که این یعنی بی‌شمار سکون در کنار یکدیگر.

پرسش ۷۲: آیا می‌توانید یکی از ساده‌ترین و روشن‌ترین مقدارهایِ ورودی و زیرفضایِ سکونِ مربوطه را معرفی کنید؟ و آیا در این شرایط، سکونِ منفردی وجود دارد؟ چرا؟

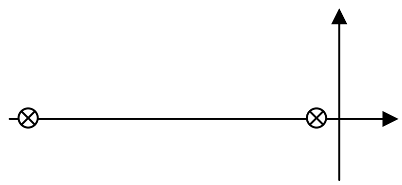
پرسش ۷۳: آیا می‌توانید استدلال کنید که مقادیرِ ویژهٔ ماتریسِ A همان قطب‌هایِ تابع تبدیل خواهند بود؟ و از آنجا نتیجه‌گیری کنید که تابع تبدیل، به تعدادِ تکرارِ مقدارِ ویژهٔ صفر، قطب در مبدأ(یا جمعگرِ تنها) دارد؟

پرسش ۷۴: برایِ موردِ ۲ و ۴ صفری اضافه کنید و پاسخِ پله را برایِ حضور این صفر سمتِ چپ از بسیار دور تا قطب و سپس پس از قطب تا مبدأ و سپس سمتِ راست هر یک جداگانه بررسی کنید. بدونِ محاسبهٔ دقیق!!!

در کلاس رفتار شناسیِ درونی برایِ نمونه‌هایِ گوناگونی و نهایتاً مرتبهٔ دومِ خطی با قطب‌هایِ ساده را دیدیم ولی حالا

رفتارشناسیِ بیرونی (رفتارِ ورودی–خروجی) که آموخته‌ایم بپردازیم به پاسخ پله!

ابتدا روشی جبری برایِ سعی در یافتنِ عبارتی آشنا برایِ پاسخ پله!



$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{10}{(s+1)(s+10)}} \longrightarrow \frac{1}{s}+\frac{\frac{10}{9}}{s+1}+\frac{-\frac{10}{9}}{s+10}$$

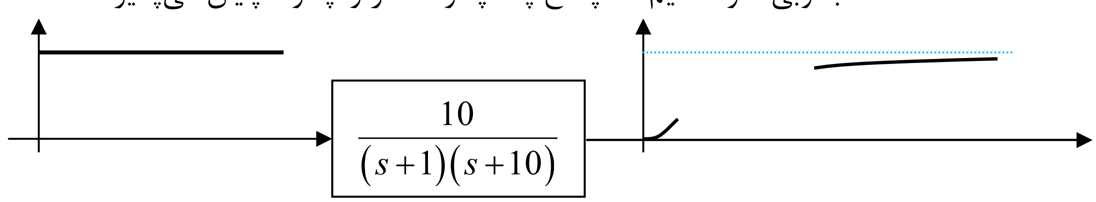
$$=1+\tfrac{10}{9}e^{-t}-\tfrac{1}{9}e^{-10t}$$

این یک روشِ جبری است برایِ محاسبهٔ دقیق در صورتِ درخواست که

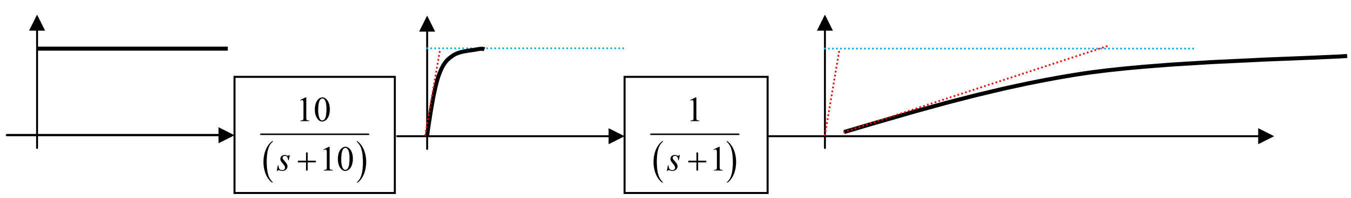
همواره سهمِ قطبِ دورتر کمتر از قطبِ نزدیکتر است!

اما برویم سراغِ روشِ تابع تبدیلی که دیدِ ساده و بدرد بخورتری بدهد!

بخوبی آموخته‌ایم که پاسخ پله چگونه آغاز و چگونه پایان می‌پذیرد:



برایِ رفتارِ میانی بیایید! داستان را سری ببینیم: ابتدا قطبِ سریعتر و سپس کندتر:



این نگاه کاملاً قابلِ تعمیم به مواردِ مرتبهٔ بالاتر است و لذاست که هر قطبی نزدیک‌تر به محورِ موهومی باشد ***غالب*** خوانده می‌شود چراکه سرعت و عمدهٔ پاسخ گذرا ناشی از آن است!

پرسش ۷۵: فرض کنید قطبِ *10-* از بسیار دورتر شروع گردد و آرام آرام به *1-* نزدیک شده به آن برسد، رفتار؟بدونِ محاسبهٔ دقیق!

پرسش ۷۶: فرض کنید صفری هم در کار باشد و این صفر را از بسیار دور شروع کنید تا *10*- و سپس تا *1*- و سپس تا مبدأ و سپس سمتِ راست، رفتار را در هر یک بررسی کنید بدونِ محاسبهٔ دقیق!

از رفتارشناسی فقط زوج قطبِ مختلط مزدوج باقی ماند!

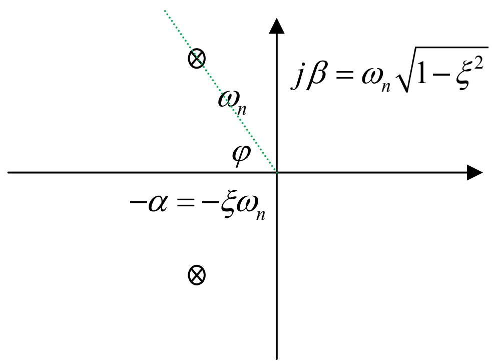
برایِ رفتارشناسیِ درونی، سیستمی در نظر می‌گیریم که ماتریسِ Aی آن بصورتِ زیر باشد، ادامه در کلاس...

....

....

رفتارشناسیِ بیرونی

ابتدا از همان روشِ جبری، پاسخ پله را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}} \longrightarrow \frac{1}{s}+\frac{A}{s+\alpha-\beta j}+\frac{B}{s+\alpha+\beta j}$$

$$A=\frac{\omega_n^2}{(-\alpha+j\beta)(2j\beta)}=\frac{\omega_n^2}{\left(\omega_n e^{j(\pi-\varphi)}\right)(2j\beta)}=\frac{-\omega_n e^{j\varphi}}{2\beta j} \quad , \quad B=\frac{\omega_n e^{-j\varphi}}{2\beta j}$$

$$y(t)=1-\frac{\omega_n}{\beta}\cdot\frac{e^{j\varphi}}{2j}\cdot e^{-\alpha t+j\beta t}+\frac{\omega_n}{\beta}\cdot\frac{e^{-j\varphi}}{2j}\cdot e^{-\alpha t-j\beta t}=1-\frac{\omega_n}{\beta}\cdot e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{j(\beta t+\varphi)}-e^{-j(\beta t+\varphi)}}{2j}\right)$$

$$y(t)=1-\frac{\omega_n}{\beta}\cdot e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)=1-\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\beta t+\varphi) \qquad \varphi=\cos^{-1}\xi$$

پرسش‌هایِ تکمیلی

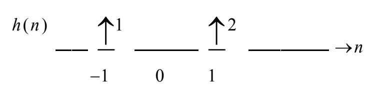
پرسش ۷۷: همهٔ آنچه عبارتِ $\frac{5s+2}{4s+8}$ ،می‌تواند به یادِ شما آورد را، با حوصلهٔ کافی، یادآور شوید. سپس هر آنچه دربارهٔ خواصِ هر یک، می‌توانید از رویِ این عبارت به دست آورید، به دست آورید.راهنمایی:از ابتداییکه با نگاهِ رنگی(طیف)، آشنا شدید، شروع نموده و به پیش روید. همهٔ آنچه این عبارت می‌تواند معنی دهد را بی کم و کاست بیاورید.

پرسش ۷۸: آنچه ما دربارهٔ تحلیلِ رفتارِ بیرونی تأکید کردیم، ظاهراً فقط منحصر به پاسخِ پله می‌شد. به نظرِ شما چگونه می‌توان این بحث‌هایِ آموخته شده را به پاسخِ ضربه تعمیم داد؟ چگونه می‌توان به پاسخِ ورودی‌هایِ شناخته شدهٔ دیگر نیز تعمیم داد؟راهنمایی: ببینید چه کنیم تا هنوز بتوان دربارهٔ رفتارِ شروع و رفتارِ مانا، نتایجِ مشابه را از تابع تبدیل، گرفت!؟ حال در موردِ نمونه‌هایِ گوناگونی که در کلاس آمد شروع و پایانِ پاسخِ ضربه را پیش‌بینی کنید.

پاسخ: کافی است توجه کنیم که پاسخ ضربهٔ تابع‌تبدیلِ $G(s)$ مساوی است با پاسخ پلهٔ تابع‌تبدیلِ $sG(s)$! و به همین ترتیب پاسخِ ورودیِ $U(s)$ به تابع تبدیلِ $G(s)$ ، برابر است با پاسخِ پله به تابع تبدیلِ $sU(s)\mathrm{G}(s)$!

پرسش ۷۹: مشابهِ آنچه در ۵۷ گذشت، می‌تواند با هر تابعِ خطی کسری از s یا z ، طرح گردد. مثلاً : $\frac{z+1}{z-1}$ ، $\frac{5s+2}{s(4s+8)}$، $\frac{10(s+5)}{s^2(s+1)(s+10)}$ ، $\frac{1}{4}\left(z^{-1}+2+z\right)$ ، $\frac{z}{(z-0.5)(z-1)}$

پرسش ۸۰: زدِ سیگنالِ زیر را بیابید. چنانچه این سیگنال، پاسخِ ضربهٔ سیستمی باشد، دربارهٔ آن سیستم چه چیزِ اضافه‌تری می‌توان گفت؟ چنانچه بدانید که سیستمِ مربوطه خطی است، چه؟ چنانچه علاوه بر خطی بودن، نامتغیر با زمان نیز باشد، چه؟(مثلاً آیا می توان پاسخِ هر ورودیِ دلخواهی را از رویِ آن بدست آورد؟)



پرسش ۸۱: حال فرض کنید پاسخِ ضربهٔ یک سیستمِ خطیِ نامتغیر با زمان، $h(n)$ ، را در دست دارید. چگونه می‌توان پاسخِ به هر ورودیِ دلخواهِ $u(n)$ را از رویِ آن بدست آورد؟ عبارتی بدهید. عبارتِ مشابه برایِ زمان‌پیوسته چه خواهد بود؟ راهنمایی: توجه کنید که همان ابتدایِ راه دیدیم که می‌توان سیگنال‌ها را با پایهٔ ضربه‌ای بیان نمود:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad , \quad x(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

پاسخ: با توجه به خطی بودن، کافی است پاسخ به همهٔ ضربه‌هایِ انتقال‌یافته، یعنی $\delta(n-k)$ها، را در اختیار داشت. اگر نامِ این پاسخ‌ها را $h_k(n)$ بگذاریم، آنگاه برایِ پاسخ به $x(n)$ بدست می‌آید:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad , \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

که اگر سیستم نامتغیر با زمان نیز باشد، آنگاه می‌دانیم که: $h_k(n)=h(n-k)$ که یعنی: پاسخ به ضربهٔ انتقال یافته به k ، مساوی است با باندازهٔ k انتقال یافتهٔ پاسخِ ضربه! و لذا می‌توان بجایِ تعدادِ بسیاری پاسخِ مجزا که لازم است در اختیار باشد، فقط یک پاسخ ضربه را بکار گرفته و با انتقالِ آن کار را تمام نمود:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad , \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

این جمع به دلیلِ همین کاربردِ مهم، نامی یافته است: تلفیق(جمعِ درهم)[۴۳] دو سیگنال! مهارت در محاسبهٔ این جمع چه در زمان‌گسسته و چه در زمان‌پیوسته، دارایِ اهمیتی است که لازم است با تمرین حاصل گردد. نکتهٔ جالب توجه این است که جمعِ درهم، مانندِ جمعِ معمولی، خاصیتِ جابجایی نیز دارد.

پرسش ۸۲: آیا برایِ هر دو سیگنالِ دلخواهِ x_1 و x_2 می‌توان نوشت: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

پرسش ۸۳:جمعِ درهمِ هر سیگنالی با ضربه $x(t)*\delta(t)$ چه می‌شود؟ با ضربهٔتأخیردار باندازهٔ t_0 $x(t)*\delta(t-t_0)$ چه؟

پرسش ۸۴: سیستمِ انتگرالگیر را در نظر بگیرید. می‌دانید که پاسخِ ضربهٔ آن پله است! حال ببینید جمعِ درهم، برایِ خروجیِ این سیستم، بازایِ هر ورودیِ دلخواهِ $x(t)$ چه می‌دهد؟ آیا نتیجه، منتظره است یا خیر؟

همین‌جا یک ویژگیِ بسیار مهم دربارهٔ سیگنال‌ها را دوباره می‌توان دید که بسیار پرکاربرد است.

۱- یادآور شوید که طیفِ ضربه، می‌شود: ۱ (این اولین و ساده‌ترین طیفی بود که بدست آوردیم!!!)

$$\Delta(f)=1$$

۲- یادآور شوید که طیفِ خروجی= طیفِ ورودی در تابع تبدیل(اساسِ تعریفِ تابع‌تبدیل!!!)

$$Y(f)=U(f)\cdot \tfrac{Y}{U}(f)$$

۳- پس !!! تابع تبدیل= طیفِ پاسخِ ضربه = تابع تبدیل !!!

$$H(f)=\Delta(f)\cdot \tfrac{Y}{U}(f)=\tfrac{Y}{U}(f) \;\Rightarrow\; \boxed{\tfrac{Y}{U}(f)=H(f)}$$

۴- پس ۲ را می‌توان نوشت: طیفِ خروجی = طیفِ ورودی «ضرب» در طیفِ پاسخ ضربه

$$Y(f) = U(f)\cdot H(f)$$

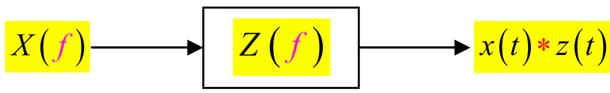
۵- از طرف دیگر نیز یادآور شویم: خروجی = ورودی «جمعِ درهم» با پاسخِ ضربه

$$y(t)=u(t)*h(t)$$

[۴۳] Convolution

۶- پس نتیجهٔ مهم و پر کاربرد: طیفِ جمعِ درهمِ دو سیگنال= حاصل‌ضربِ طیف‌هایِ دو سیگنال

$$\{x(t)*z(t)\}(f)=X(f)\cdot Z(f)$$

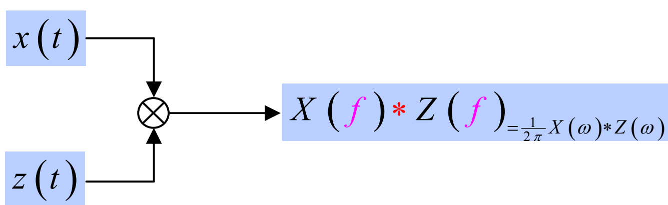


پرسش ۸۵: جمعِ درهمِ هر سیگنالی با ضربه $x(t)*\delta(t)$ چه می‌شود؟ با ضربهٔ تأخیردار باندازهٔ t_0 $x(t)*\delta(t-t_0)$ چه؟

پرسش ۸۶: جمعِ درهمِ هر سیگنالی با پله $x(t)*u_{-1}(t)$ چه می‌شود؟ با پلهٔ تأخیردار باندازهٔ t_0 $x(t)*u_{-1}(t-t_0)$ چه؟

۷- و البته به همین سادگی: طیفِ حاصل‌ضربِ دو سیگنال= جمعِ درهمِ طیف‌هایِ دو سیگنال

$$\{x(t)\cdot z(t)\}(f)=X(f)*Z(f)_{=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Z(\omega)}$$



پرسش ۸۷: ابتدا بیادآورید که طیفِ $\cos(2\pi f_c t)$ چه بود و سپس بگویید طیفِ حاصل‌ضربِ هر سیگنالی در آن، $x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)$ بر حسبِ طیفِ آن سیگنال چه می‌شود؟ به این کار می‌گویند سوار کردنِ سیگنال رویِ آن فرکانس[۴۴]، در واقع آن علامت برایِ حمل، به فرشته‌ای با آن بال، داده می‌شود!

پرسش ۸۸: با رعایتِ چه شرطی می‌توان مطمئن بود که همهٔ پیامِ علامت، به فرشتهٔ حامِل داده شده یا بعبارتِ بهتر فرشتهٔ حامِلِ مناسب چه ویژگی باید دارا باشد که پیامِ علامت، مخدوش نگردد؟

پرسش ۸۹: چگونه می‌توان پس از حمل، در مقصد، از فرشتهٔ مزبور، علامت را دریافت نمود؟ به این کار، پیاده کردنِ سوار[۴۵]، گویند!

[۴۴] مدولاسیون *Modulation*

[۴۵] دِمدولاسیون *Demodulation*

درس چهارم

از زمان‌پیوسته به زمان‌گسسته و برعکس

نمونه‌برداری : سیستمی برایِ رفتن از فرضِ زمان‌پیوسته به زمان‌گسسته

گفتیم که زمان‌پیوسته یعنی: فرض کرده‌ایم که بینِ هر دو زمانِ دلخواه(هر دو مشاهده)، این امکان بوده است که برویم سراغِ چیزها از جمله خودِ زمان(مشاهدهٔ دیگری داشته باشیم)، و سپس مقداری برایشان بدست آوریم. لذا بینِ هر دو زمانِ هر چند به همین نزدیک، دوباره زمانی دیگر، تخیل می‌کنیم.

حال اگر در زمان‌هایی از پیش تعیین شده سراغِ آنها برویم، می‌گوییم از سیگنالی که با زمان، پیوسته فرض شده بود، نمونه‌برداری کرده‌ایم. توجه کنید که بنابه فرض، این زمان‌ها هر چه می‌توانند باشند ولی چون به هر حال از هم گسیخته‌اند، اصطلاحاً می‌گوییم: حال سیگنالی گسسته داریم.

عموماً فاصلهٔ نمونه‌ها را یکسان می‌گیرند و در اینصورت به آن دورهٔ(پریودِ) نمونه‌برداری(T_s) و به معکوسِ آن فرکانسِ نمونه‌برداری(f_s) گفته می‌شود. توجه دارید که فرکانسِ نمونه‌برداری یعنی همان تعدادِ نمونه‌برداری در واحد زمان.

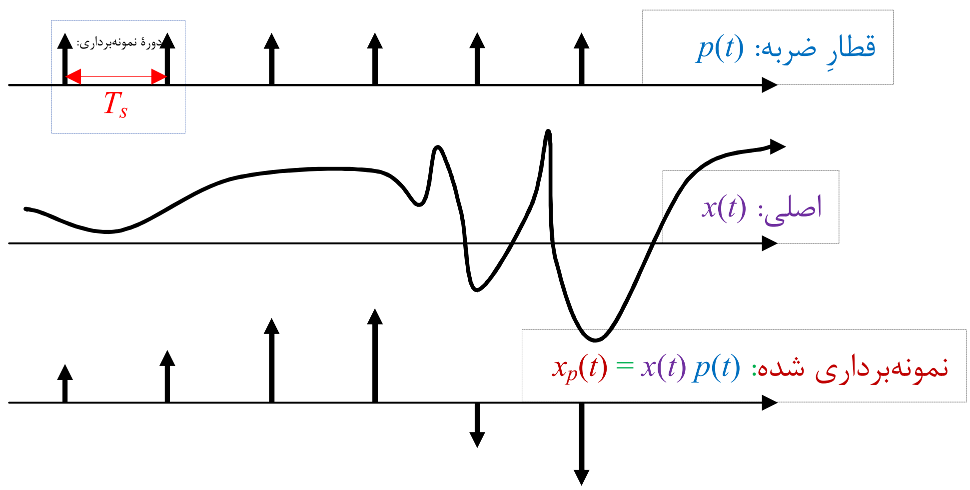
اینکه چگونه برایِ یک سیگنالی، سیستمی آماده کنیم که بتواند این نمونه‌برداری را انجام دهد، خود یک موضوعِ مهم است و بستگیِ جدی به آن سیگنال دارد. آیا ولتاژ است یا جریان یا توان یا فاصله یا ... و در کجاست و خلاصه شرایط چگونه است و ...؟ طبیعی است که ما در اینجا فرض می‌کنیم که بالاخره به نحوی چنین کاری انجام می‌گیرد و ما از فرضِ زمان‌پیوسته به زمان‌گسسته می‌آییم. ولی خالی از لطف نیست که توجه کنیم که همهٔ گزارش‌هایی که بصورتِ عددی درآمده و در اختیار قرار می‌گیرند قاعدتاً ویژهٔ زمانی خاص‌اند و لذا معلوم می‌شود که به هرحال به گونه‌ای چنین سیستمی در آنجا بوده است. مبدلِ ولتاژ به رقم که معروف به *A/D*[۴۶] است، سیگنالِ ولتاژ که زمان‌پیوسته فرض شده است را در فاصلهٔ زمانی‌های قابلِ تنظیمی سراغش رفته و سعی می‌کند مقدارِ آن را خوانده و به سیگنال‌هایی تبدیل کند که پیشتر برایِ ما معنی ارقام یافته‌اند. در ادامه ما از این موضوعِ شیرین می‌گذریم.

---

[۴۶] *Analog to Digital convertor*

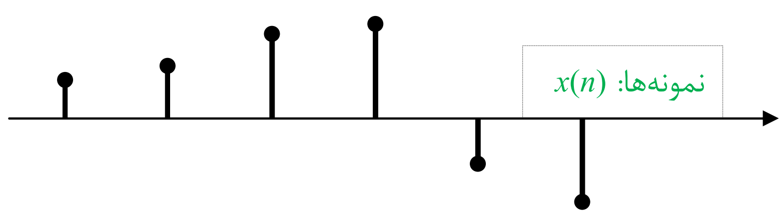
به لحاظِ ریاضی ما فقط سیستمی داریم که ما را از فرضِ زمان‌پیوسته به زمان‌گسسته منتقل می‌کند و لذا مقادیر، عیناً منتقل می‌شوند ولی فقط در زمان‌هایِ نمونه‌برداری! و از آنچه در بینِ این زمان‌ها رخ داده است، اطلاعی در دست نخواهد بود. به عبارتِ دقیقتر کلیهٔ اطلاعاتِ بینِ هر دو نمونه از دست می‌روند.

به همین دلیل است که در ریاضی‌سازیِ سیستمِ نمونه‌برداری همهٔ سیگنال را در فاصلهٔ زمانی‌هایِ بینِ نمونه‌ها، در صفر ضرب می‌کنند و در زمانِ نمونه‌ها یک ضربهٔ واحد در آن ضرب می‌کنند تا ضربه‌ای در خروجی بماند که مقدارش مساویِ مقدارِ سیگنال در زمان نمونه‌برداری است. به این ترتیب خروجیِ این سیستمِ فرضیِ ریاضی چیزی نخواهد بود، جز یک سری ضربه در زمان‌هایِ نمونه‌برداری و در مابقیِ زمان‌ها صفر !!!. گویی ما سیگنال را در یک قطارِ ضربه که فاصلهٔ آنها نیز همان فاصله‌هایِ نمونه‌برداری است، ضرب می‌کنیم(شکلِ زیر).



شکل ۷

با این ریاضی‌سازی هنوز زمان‌پیوسته است ولی می‌دانیم که لازم نیست در فاصله‌ها سراغش برویم چراکه از پیش می‌دانیم که مقدارش صفر است. به این ترتیب است که این صفرها را رها نموده و فقط به اعداد در ضربه‌ها معطوف می‌شویم و فقط با آنها کار می‌کنیم. ***همین رها کردنِ صفرهایِ خودساخته و فقط پرداختنِ به اعدادِ هر یک از ضربه‌ها یعنی داشتنِ سیگنالی با زمانِ گسسته!!!***



شکل ۸

در واقع همان هنگامی‌که چشمِ خود را بسته و مقادیرِ سیگنال در فاصله زمانی بینِ دو نمونه‌برداری را ندید گرفتیم، به سیگنالی گسسته در زمان، تن در داده‌ایم. آنچه گذشت نوعی ریاضی‌سازیِ این سیستم است و نه اینکه واقعاً قطارِ ضربه‌ای و یا ضرب کردنی در کار باشد. ولی برایِ ریاضی‌سازی از سیگنالِ اصلی به سیگنالِ گسسته، امیدواریم تعبیرِ ضرب در قطارِ ضربه بتواند راهگشا باشد.

توجه کنید که نه تنها برایِ رفتنِ از فرضِ زمانِ پیوسته به زمانِ گسسته(یعنی از شکلِ۱ به شکلِ۲)، از تعبیرِ قطارِ ضربه استفاده می‌شود بلکه برایِ رفتنِ از زمانِ گسسته به پیوسته(یعنی از شکلِ۲ به انتهایِ شکلِ۱) نیز از همین تعبیرِ ریاضی استفاده می‌شود. این سیستمِ تخیلیِ ریاضی در هر دو مورد نیز یکسان، نمایش داده می‌شود که در شکلِ زیر آمده است.

$$\xrightarrow{\quad x(t)\quad} \square \xrightarrow{\quad x_p(t) \vee x(n)\quad} \quad , \quad \xrightarrow{\quad y(n)\quad} \square \xrightarrow{\quad y_p(t)\quad}$$

شکل ۹

تعبیرِ هر یک نباید فراموش گردیده و یا با یکدیگر مخلوط شود. سمتِ چپ یعنی: از سیگنالِ اصلیِ $x(t)$ نمونه‌برداری شده و به نمونه‌برداری شدهٔ آن، $x_p(t)$ ، و یا نمونه‌هایِ آن ، $x(n)$ ، می‌رسیم. اینکه کدامیک خروجی تلقی گردد، بستگی به سیستمِ بعدی دارد که آیا هنوز پیوسته است یا گسسته! . و اما سمتِ راستی یعنی: از نمونه‌ها در زمانِ گسسته،$y(n)$ ، می‌رویم به قطارِ ضربه‌ای که اندازه‌ها بستگی به مقدارِ نمونه‌ها دارد، $y_p(t)$ ، و زمان پیوسته است.

پرسش ۹۰: سیگنالی که پس از نمونه‌برداری بدست آمده است، نمونه‌هایِ چند گونه سیگنالِ پیوسته، می‌تواند باشد؟

پاسخ: بی‌شمار سیگنالِ دیگر نیز می‌توانند باشند که همگی دارایِ همین نمونه‌ها باشند. در واقع همهٔ سیگنال‌هایی که در زمان‌هایِ نمونه‌برداری، از مقدارِ یکسانی می‌گذرند، ولی در فواصلِ بینِ آنها لزوماً یکی نیستند، اطلاعاتِ باقی‌مانده پس از نمونه‌برداری برایِ همگیِ آنها، یکسان است. درکِ این موضوعِ بسیارِ ساده اساس بسیاری از مباحثِ مهم در رابطه با نمونه‌برداری است.

پرسش ۹۱: آیا می‌توانید مثالی بزنید که دو سیگنالِ گوناگون، در یک نمونه‌برداری، سیگنالِ گسستهٔ یکسانی نتیجه بدهند؟! راهنمایی: دو سینوسی در نظر بگیرید که فرکانسِ یکی مضربِ صحیحی از فرکانسِ دیگری است(مثلاً دو برابر است!). سپس دورهٔ نمونه‌برداری را طوری تعریف کنید که نمونه‌ها یکسان شوند! برنامهٔ *Sampling_1* را نگاه کنید!

پرسش ۹۲: فرض کنید از سیگنالِ $x(t)$ با فرکانسِ f_s نمونه‌برداری شده و سیگنالِ گسستهٔ $x(n)$ نتیجه شده است. سیگنال‌هایی را از رویِ خودِ سیگنالِ اصلیِ $x(t)$، ساخته و معرفی کنید که با همین نمونه‌برداری، همگی همان $x(n)$ را نتیجه بدهند.

پرسش ۹۳: آیا با توجه به دو پرسشِ بالا می‌توانید توجیه کنید که چرا طیفِ سیگنالِ گسسته، دوره‌ای در نظر گرفته می‌شود؟ و این دوره نیز باید به زبانِ پیوسته، f_s (Hz) ($\omega_s = 2\pi f_s$)، و به زبانِ گسسته ۱ بار در هر گام (یا $\Omega_s = 2\pi$) در نظر گرفته شود.

پاسخ:

حال توجه شما را جلب می‌کنم که به کمک تعبیرِ ریاضیِ ضربِ در قطارِ ضربه می‌توان رسماً محاسبه نمود که با فرآیندِ نمونه‌برداری، طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده، چه ربطی به طیفِ سیگنالِ اصلی دارد و چگونه می‌تواند از رویِ آن بدست آید!؟ در واقع می‌توان رسماً به این پرسش پرداخت که: **پس از نمونه‌برداری چه بلایی بر سرِ طیف آمده است؟**

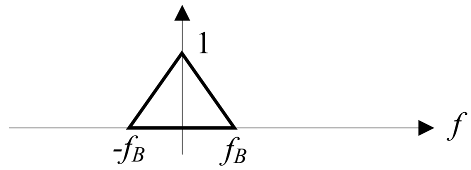
برای این منظور کافی است به طیفِ قطار ضربه توجه کنیم و در عین حال خاصیت بسیار پرکاربرد و مهمِ طیفِ حاصلضرب را یادآور شویم که اگر در حوزهٔ زمان دو سیگنال در هم ضرب شوند در حوزهٔ فرکانس کانوالو می‌شوند. پس طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده، مساوی است با کانولوشنِ همین طیف‌اش با طیفِ سیگنالِ قطارِ ضربه!

پرسش ۹۴: طیفِ قطارِ ضربهٔ پیوسته($p(t)$) چیست؟($P(s)=?$)

پاسخ: بخوبی می‌دانید که قطارِ ضربه چون سیگنالی دوره‌ای است، طیفش نیز عبارتست از یک سری ضربه در هماهنگ‌هایِ فرکانسِ اصلی‌اش! و چون فرکانسِ اصلیِ آن f_s است، پس طیفِ این قطار نیز خود، یک قطار از ضربه‌ها خواهد بود در f_s و $2f_s$ و $3f_s$ و ... و همینطور $-f_s$ و $-2f_s$ و $-3f_s$ و .... . توجه گردد که در اینجا، مقدار این ضربه‌ها نیز همگی با هم برابر و برابرِ $f_s = \frac{1}{T_s}$ خواهند بود! چرا؟

به این ترتیب طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده عبارتست از حضورِ طیفِ سیگنالِ اصلی عیناً (فقط ضربدرِ $f_s = \frac{1}{T_s}$)، بعلاوهٔ حضورِ منتقل شدهٔ آن عیناً به فرکانسِ f_s (فقط ضربدرِ $f_s = \frac{1}{T_s}$) و بعلاوهٔ منتقل شدهٔ آن عیناً به فرکانسِ $-f_s$ (فقط ضربدرِ $f_s = \frac{1}{T_s}$) و به همین ترتیب بعلاوهٔ منتقل شدهٔ آن عیناً به تمامیِ هماهنگ‌هایِ f_s (فقط ضربدرِ $f_s = \frac{1}{T_s}$) ! یعنی

پرسش ۹۵: اگر بر فرض، طیفِ سیگنالِ اصلی در یک باندِ محدودی از فرکانس‌ها غیر صفر بوده و در بقیه صفر باشد، مانندِ آنچه در شکل۱ می‌بینید، و اصطلاحاً بتوان برایِ آن، فرکانسِ قطعِ f_B در نظر گرفت، آنگاه با فرضِ $2f_B<f_s$ (نمونه‌برداریِ تند[۴۷])، طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده را نشان دهید.



شکل ۱۰

پاسخ:

شکل ۱۱

پرسش ۹۶: با فرضِ $2f_B>f_s$ (نمونه‌برداریِ کند[۴۸]) بارِ دیگر به پرسشِ بالا پاسخ دهید.

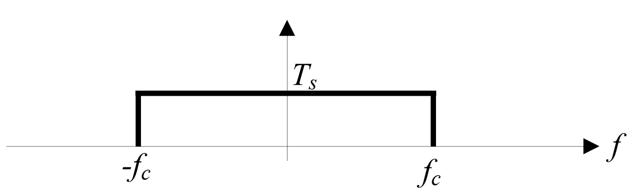
پاسخ:

شکل ۱۲

آنچه که در پاسخِ پرسشِ بالا برخورد کردید، اصطلاحاً اختلاطِ فرکانسی[۴۹] نامیده می‌شود. توجه کنید که در چنین صورتی مقداری از اطلاعاتِ سیگنال مغشوش شده و گفته می‌شود که دیگر سیگنالِ اصلی قابل بازسازی نیست!

پرسش ۹۷: آیا اگر اختلاطِ فرکانسی صورت نپذیرد، می‌توان سیگنالِ اصلی را از رویِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده بازسازی نمود؟ چگونه؟

پاسخ: چنانچه سیگنالِ نمونه‌برداری شده را از یک فیلترِ پایین‌گذرِ با فرکانسِ قطعِ بزرگتر از f_B و کوچکتر از $f_s - f_B$ بگذرانیم، سیگنالِ اصلیِ اولیه کاملاً باز یافته می‌شود (البته بهرهٔ جبرانیِ T_s فراموش نگردد). به همین دلیل است که گفته می‌شود:



۴۷ UpSampeling

۴۸ UnderSampling

۴۹ Alaising

کمترین فرکانسِ نمونه‌برداریِ مجاز برایِ اینکه بتوان از نمونه‌ها دوباره سیگنالِ اصلی را بازیابی نمود عبارتست از ۲ برابرِ بیشترین فرکانسِ موجود در سیگنال!

پرسش ۹۸: چنانچه معیارِ بالا رعایت نگردد، چه فرکانس‌هایی از اطلاعاتِ موجود در نمونه‌ها، قابلِ اعتماد خواهند بود؟

پرسش ۹۹: شرایطِ پرسشِ ۹ را در نظر بگیرید و بگویید پس از بازیابی با یک فیلترِ پایین‌گذر با فرکانسِ قطعِ f_c ، بیشترین فرکانسِ ممکنِ قابل مشاهده در نتیجه، چقدر است؟

حال دوباره بازگردیم به سیگنالِ نمونه‌برداری شده از $x(t)$ ، یعنی: $x_p(t)$ ، و به این پرسشِ اساسی بپردازیم:

پرسش ۱۰۰: طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده چگونه از طیفِ سیگنالِ اصلی، می‌تواند بدست آید؟

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \quad , \quad x_p(t) \longleftrightarrow X_p(s) \xleftrightarrow{?} X(s)$$

پاسخ: آیا با توجه به آنچه گذشت، موافق نیستید که:

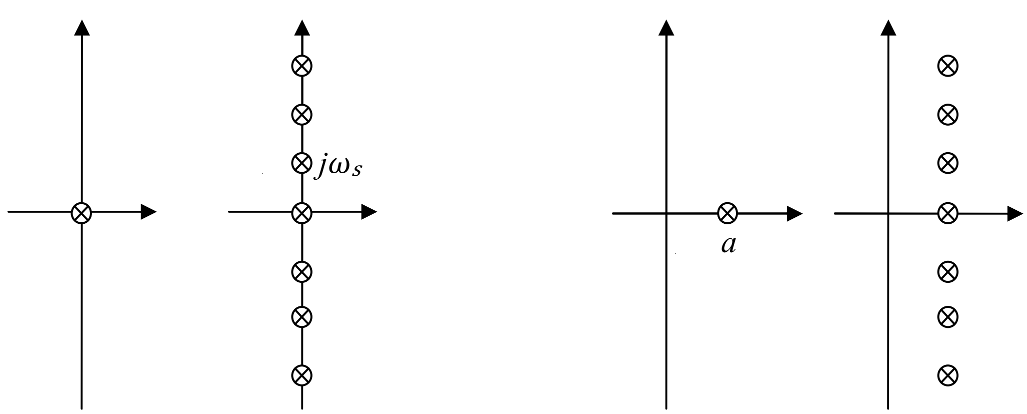
$$X_p(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - k\, j\omega_s)$$

مثلاً برایِ پلهٔ واحد نمونه‌برداری شده، داریم:

$$U_p(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(s - k\, j\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{s - k\, j\omega_s} \right)$$

که یعنی بجایِ تک قطبِ در مبدأ، بی‌شمار قطبِ دیگر در بالا و پایینِ آن بفاصلهٔ ω_s از همدیگر بوجود آمده‌اند!

و یا برایِ $e^{at}\, u_{-1}(t)$ نمونه‌برداری شده، داریم: $\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{s - k\, j\omega_s - a} \right)$ که یعنی بجایِ تک قطبِ در a ، بی‌شمار قطبِ دیگر در بالا و پایینِ آن بفاصلهٔ ω_s از همدیگر نیز بوجود آمده‌اند!



شکل ۱۳

ملاحظه می‌کنید که عبارتِ مناسبی برایِ محاسبه به نظر نمی‌رسد! برایِ بدست آوردنِ عبارتی مناسب لازم است کاری کنیم. برایِ این منظور پیشنهاد می‌کنیم از مسیرِ مستقیم، سراغِ طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده، برویم!

عبارتِ رفت را بیاد آورده و طیفِ سیگنالِ $x_p(t)$ را مستقیماً بدست آورید:

$$X_p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-(\sigma + j\omega) n T_s} =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \left(e^{(\sigma T_s + j\omega T_s)} \right)^{-n} \xrightarrow{z = e^{(\sigma T_s + j\omega T_s)} = e^{(\sigma T_s)} e^{(j\omega T_s)} = re^{j\Omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

و لذا ملاحظه می‌کنید که با یک تغییرِ متغیر، می‌توان به عبارتِ ساده‌تری رسید که پیشتر محاسبهٔ آن را آموخته‌ایم و آن را زدِ(طیفِ) سیگنالِ گسسته نامیده‌ایم. لذا به هیچ وجه لازم نیست برایِ آن سریِ بالا بدست آمده، محاسباتِ جدیدی را پیش بکشیم، چراکه در واقع **لاپلاسِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده همان زدِ سیگنالِ نمونه‌هاست** و داریم:

$$X_p(s) = X(z)\Big|_{z=e^{ST_s}}$$

در واقع همان هنگامی‌که داشتیم زدِ(طیفِ) سیگنال‌هایِ گسسته را می‌آموختیم، داشتیم لاپلاسِ(طیفِ) سیگنال‌هایِ نمونه برداری شده‌ای را که نمونه‌هایِ آنها، آن سیگنال‌هایِ گسسته می‌شوند، را نیز می‌آموختیم.

اما هرگز فراموش نکنیم که عبارتِ جمعیِ بالاتر بدست آمده، به لحاظِ مفهومی، بسیار پرکاربردتر است چراکه رابطهٔ بینِ طیفِ سیگنالِ اصلی و نمونه‌برداری شده را می‌دهد، هر چند ممکن است به لحاظِ محاسباتِ دقیق لازم باشد به زدِ سیگنالِ نمونه‌ها متوسل شویم.

پرسش ۱۰۱: الف- نمونه‌برداری از پلهٔ واحدِ پیوسته، سیگنالِ گسسته‌ای را بدست خواهد داد(در زمانِ صفر پلهٔ واحد را نیم بگیرید و نه یک!) زدِ(طیفِ) این نمونه‌ها را بدست آورید. پ- طیفِ سیگنالِ نمونه‌ها را در کنارِ طیفِ سیگنالِ اصلی از صفر تا فرکانسِ نمونه‌برداری رسم کنید و با هم مقایسه کنید. به نظرِ شما فرق‌هایِ موجود ناشی از چیست؟

یک D/A [50] به همراهِ مداراتِ جانبی‌اش می‌تواند در فواصلِ زمانیِ معین قطاری از عدد را به ترتیب به ولتاژِ متناظر تبدیل کند و تا رسیدنِ عددِ بعدی ولتاژ را در همان مقدار نگهدارد و به همین ترتیب ادامه دهد. آنچه این سیستم انجام می‌دهد، گذر از زمانِ گسسته به زمانِ پیوسته است، البته بهمراهِ یک نگهداریِ خاصی!

پرسش ۱۰۲: الگویِ ریاضیِ این سیستم را با توجه به سمتِ راستِ شکلِ۳ و پاسخِ ضربه‌اش بدست آورده و نمایش دهید.

پرسش ۱۰۳: به ساختمانِ داخلیِ آن فکر کنید که اگر شما بودید چگونه آن را می‌ساختید؟

پرسش ۱۰۴: آیا می‌توان این سیستم را به عنوانِ یک بازیابِ سیگنالِ پیوسته‌ای که گسسته شده است، استفاده نمود؟ در چنین صورتی پاسخ فرکانسیِ آن را با فیلترِ ایده‌الی که در پاسخِ پرسشِ ۸ مطرح شد، مقایسه کنید. در مقایسهٔ خود سببی بودن و نبودن را نیز در نظر بگیرید.

بازیاب‌هایِ تقریبیِ دیگری نیز می‌توان در نظر گرفت، مثلاً بازیابی را در نظر بگیرید که نقاطِ نمونه‌ها را در فاصلهٔ بینِ نمونه‌ها به یکدیگر وصل می‌کند و خروجی می‌دهد. این به هر دو صورتِ سببی و ناسببی ممکن است.

پرسش ۱۰۵: آیا می‌توانید ابتدا هر دو صورت آن را الگوسازی نموده، نمایشِ بلوکی دهید و سپس پاسخ فرکانسیِ آنها را با ایده‌آل و موردِ پیشین مقایسه کنید؟یادآور شوید که طیفِ سیستمِ ایجادکنندهٔ تأخیرِ خالص عبارتست از: $e^{-T_D s}$

ساختنِ فیلتر (سنتز)

بیایید در ادامه یک نگاهی نیز به فیلترِ ایده‌آل بیاندازیم. مهمترین پرسش این است که آیا می‌توان چنین فیلتری ساخت؟! توجه کنید که ما تا حدودی آموخته‌ایم که چگونه اگر سیستمِ خطی و نامتغیر با زمانی در حوزهٔ زمان با جمعگرها و غیره از همین قبیل ساخته شده باشد، پاسخِ فرکانسی‌اش را بیابیم! ولی دربارهٔ مسیرِ معکوس، تاکنون گفتگویی نداشته‌ایم. یعنی اگر یک مشخصهٔ فرکانسی‌ای داده شود که خطی و نامتغیر با زمان نیز باشد، و به دنبالِ ساختنِ زیرسیستمی درسیستمِ بزرگتری باشیم که چنین پاسخ فرکانسی‌ای را بینِ برخی سیگنال‌هایِ آن بدهد و به این ترتیب کاری را برایِ ما سامان دهد، می‌گوییم به دنبالِ ساختنِ فیلتری برایِ آن سیستم، هستیم.

مانندِ موضوعِ بازیابی که در بالا آمد که ما سیگنالی را بصورتِ نمونه‌ها داریم ولی سیگنالِ اصلیِ پیوسته را می‌خواهیم از آن بدست آوریم. حقیقت این است که ساختن بستگیِ جدی به سیستمِ مورد نظر دارد که

---

[50] *Digital to Analog Convertor*

می‌خواهید بکار بندید. اگر فقط قصدتان این است که در هر زمانِ دلخواهی بدانید سیگنالِ اصلی چه بوده است، می‌دانید که به این کار درون‌یابی گویند. اما ممکن است مثلاً بخواهید صدایی را از آن فیلتر بگذرانید. در همین حالت اخیر نیز ممکن است صدا در زمانی که اختیارش در دستِ ما نیست، در حالِ تولید است و ممکن است در زمانی که اختیارش در دستِ ماست، تولید شده است که هر یک از این دو، سیستمِ خاص خود را می‌طلبد. مثلاً در اولی لازم است فیلتر سببی باشد تا بتواند ساخته شده و بدرد بخورد ولی در حالتِ دوم لازم نیست چنین باشد و چه بسا فیلترِ ناسببی بهتر نیز باشد.

در ادامه برایِ درون‌یابیِ ایده‌آلِ موردِ ادعا، عبارتی بدست می‌آوریم تا ببینیم چگونه ممکن است فیلترِ ایده‌آل چنین کند و احیاناً چه ملزوماتِ دیگری دارد و چه چیزهایی نیاز است! ابتدا صورتِ مسئله را کمی شفاف‌تر طرح می‌کنیم.

پرسش ۱۰۶: آیا می‌توانید برایِ هر ورودیِ دلخواهِ داده شده در زمان، خروجیِ یک فیلترِ پایین‌گذرِ ایده‌آل را محاسبه کنید؟ سپس ببینید آیا می‌شود این پاسخ را برایِ ورودیِ به شکلِ قطارِ ضربه‌ای نیز ساده‌تر نمود؟

پاسخ : ظاهراً آری! داستان بسیار ساده به نظر می‌رسد، چرا که پیشتر دانستیم برایِ سیستمِ خطیِ ثابت با زمان داریم:

۱- خروجی مساوی است با کانولوشنِ ورودی با پاسخِ ضربهٔ سیستم!
۲- ضمناً پاسخ فرکانسیِ هر سیستمِ خطیِ ثابت با زمان برابر است با طیفِ پاسخ ضربه!
۳- با استفاده از عبارتِ برگشت می‌توان از طیفِ پاسخ ضربه به خودِ آن رسید!

لذاست که امید می‌رود بتوان عبارتی برای خروجی بر حسبِ ورودی بدست آورد و چون می‌دانیم ضمناً ورودیِ فیلتر نیز قطارِ ضربه است، احتمالاً عبارتِ مناسبی بدست آید. خوب حال کار را اجرایی کنیم:

۱- ابتدا از رویِ پاسخِ فرکانسی که همان طیفِ پاسخ ضربه است، خودِ پاسخ ضربه را از عبارتِ برگشت محاسبه کنیم!

$$h(t)=T_s\int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi f t}df=2T_s\int_{0}^{f_c}\cos(2\pi f t)\,df=\frac{2T_s}{2\pi t}\left(\sin(2\pi f_c t)-0\right)=\frac{T_s\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}=\frac{T_s\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

توجه کنید که T_s بدلیلِ بهرهٔ T_s موردِ نیاز برایِ فیلترِ ایده‌آل است که جبرانِ بهرهٔ $f_s=\frac{1}{T_s}$ در طیفِ سیگنالِ ضربه‌ای است!

۲- حال، خروجی را از عبارتِ کانولوشن برایِ هر ورودیِ دلخواه می‌نویسیم:

$$y(t)=T_s\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi f_c(\tau-t)\right)}{\pi(\tau-t)}x(\tau)\,d\tau=T_s\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi f_c(\tau)\right)}{\pi\tau}x(t-\tau)\,d\tau$$

۳- حال سعی می‌کنیم خروجی را برایِ $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$ بدست آوریم:

$$y(t)=T_s\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(2\pi f_c(\tau-t)\right)}{\pi(\tau-t)}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(\tau-nT_s)\right)d\tau=$$

$$y(t)=T_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(2\pi f_c(\tau-t)\right)}{\pi(\tau-t)}\right)\delta(\tau-nT_s)\,d\tau=$$

$$y(t)=T_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\frac{\sin\left(2\pi f_c(nT_s-t)\right)}{\pi(nT_s-t)}$$

و یا

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{T_s\sin\left(\omega_c(t-nT_s)\right)}{\pi(t-nT_s)}$$

پرسش ۱۰۷: آیا می‌توانید با مثالی ساده این عبارتِ بدست آمده را بیآزمایید؟ راهنمایی: یک کسینوس با فرکانسِ معلومی(مثلاً *1Hz*) را در نظر گرفته و فرض کنید از آن با کمترین فرکانسِ مناسب،(*2Hz*)، نمونه‌برداری گردیده است. سپس با استفاده از عبارتِ بالا سعی کنید از رویِ نمونه‌ها، در تعدادی از زمان‌هایِ انتخابیِ خودتان بینِ نمونه‌ها(مثلاً بینِ هر دو نمونه ۹ زمانِ دیگر)، کسینوس را محاسبه کنید. پر واضح است که به راحتی می‌توانید این مقادیرِ محاسبه‌شده را با مقادیرِ اصلیِ کسینوس مقایسه نموده و ببینید که تا چه اندازه به درستی بازیابی شده است! گفتگوی با حوصله‌ای داشته باشید برایِ دلیل یا دلایلِ هرگونه مشکل و تفاوتی که می‌بینید!

پرسش ۱۰۸: در مثالِ بالا، اگر نمونه‌ها را با *D/A* پیوسته کنید، چه تفاوتهایی با روشِ بالا دارد؟

پرسش ۱۰۹: مشابهِ بالا $x(t)=10\sin\left(2\pi t+\pi/6\right)+5\cos\left(2\pi 10t+\pi/3\right)-\sin\left(2\pi 100t+\pi/4\right)$ بگیرید و با دو فرکانسِ مناسبِ متفاوت و یکبار هم با فرکانسِ نامناسب، کار بالا را تکرار کنید.

ساختنِ فیلتر، همانگونه که بالاتر نیز اشاره شد، کاملاً بستگی به نوعِ استفادهٔ شما دارد. آنچه بالا با فیلتر ایده‌آل گذشت، بدلیلِ نوعِ استفادهٔ صرفاً محاسباتی‌ای بود که مد نظر داشتیم. یعنی چون می‌خواستیم بصورتِ محاسباتِ عددی و در «زمانِ دراختیار»(*off-line*)، کارِ فیلتر را انجام دهیم، این عبارت بدردمان خورد.

چنانچه بخواهید سیگنالِ ولتاژی را که در مداری، نسبت به «زمانی که در اختیارتان نیست»(*on-line*)، در حالِ تغییر است، فیلتر کنید، شاید اساساً داستان بکلی متفاوت گردد. آنگاه شاید لازم شود که با قطعاتِ الکتریکی و الکترونیکی مانندِ خازن، مقاومت، سلف و یا حتی قطعاتِ فعال مانندِ تقویت‌کننده‌هایِ عملیاتی و ... فیلتری را بسازید.

و یا در خودرو هنگامی‌که می‌خواهید کاری کنید که پستی و بلندی‌هایِ جاده، سرنشینان و خودرو را کمتر آسیب بزند، از قطعاتِ مکانیکی مانندِ فنر و کمک‌فنر استفاده می‌کنید.

روشن است که در همهٔ این موارد، چه عددی، چه الکترونیکی و چه مکانیکی، انتخابِ مشخصه‌های این قطعات بستگیِ مستقیم به طراحیِ شما از فیلتر و مشخصهٔ فرکانسیِ موردِ نظرتان دارد.

اینکه فیلترهایِ عددیِ محاسباتی بسیار مهم شده است، دلیلِ روشنی دارد که کم و بیش همگی می‌دانیم و آن هم به پاسِ پیشرفتِ فنآوری در الکترونیکِ تجهیزاتِ رقمی(*digital*) و بویژه رایانه است! پیشتر چون محاسبات بسیار سخت و طولانی بود، تمایل به این‌گونه ساختنِ فیلترها و سیستم‌ها نیز بسیار کم بود. مثلاً پردازشِ صدا و تصویر عموماً بصورتِ آنالوگ صورت می‌پذیرفت ولی هم‌اکنون در بسیاری از موارد، بسویِ پردازش‌هایِ رقمی کشیده شده‌ایم چراکه هم کار ساده‌تر و هم کم‌حجم‌تر و هم شاید دقیق‌تر می‌شود.

در ادامه طی پرسش‌هایی به فیلترِ متوسط‌گیرِ هموارساز و فیلترِ باتروُرث خواهیم پرداخت. فیلترهایِ هموارساز همانگونه که از نامشان پیداست، باعث می‌شوند که ورودی کمی هموارتر در خروجی ظاهر گردد. در واقع گویی آنچه شما واقعاً به دنبالش هستید، کمی دچارِ ناهمواری‌هایِ ناخواسته‌ای شده است و یا اصطلاحاً سیگنالِ دیگری که آن را به همین دلیلِ ناخواسته بودن، نویز می‌نامند، روی‌اش سوار شده است. لذا شما علاقمندید که با استفاده از فیلتر کردنِ مناسبی از شرِ نویز خلاص شوید!

فیلترِ متوسط‌گیر

رابطهٔ خروجی و ورودیِ یک فیلتر را بصورتِ $y(n)=\frac{1}{3}\big(u(n-1)+u(n)+u(n+1)\big)$ در نظر بگیرید.

پرسش ۱۱۰: آیا توجه دارید که خروجی در هر گام، متوسطِ ورودی‌هایِ همان گام و یکی قبلی و یکی بعدی است؟ سعی کنید پاسخ‌فرکانسیِ این فیلتر را رسم کنید و از رویِ آن دربارهٔ ویژگیِ آن گفتگو کنید.

حال توجه کنید که این متوسط‌گیری گونه‌هایِ دیگری نیز ممکن است. مثلاً می‌توان وزنِ $u(n)$ را هنگامِ متوسط‌گیری بیشتر نمود: $y(n)=\frac{1}{4}\left(u(n-1)+2u(n)+(n+1)\right)$. یا در متوسط‌گیری تعدادِ بیشتری از قبلی‌ها یا بعدی‌ها را به میان کشید: $y(n)=\frac{1}{5}\left(u(n-2)+u(n-1)+u(n)+u(n+1)+u(n+2)\right)$!

روشن است که به این ترتیب فیلترهایِ متعددی با خواصِ گوناگونِ فرکانسی‌ای می‌تواند مطرح گردد. گفتگو دربارهٔ هر یک از این تنوع‌ها می‌تواند بصورتِ مسئله‌ای جداگانه پرداخته شود.

فیلترهایِ باترورث

این فیلترها هم بصورتِ پیوسته و هم بصورتِ گسسته مطرح هستند. ویژگیِ اصلیِ فرکانسیِ آنها این است که دارایِ مشخصهٔ اندازهٔ زیر هستند:

$$\left|B(j\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\omega/\omega_c\right)^{2N}}$$

که بازایِ Nهایِ گوناگون مرتبهٔ فیلتر معلوم می‌گردد. مشخصهٔ فرکانسی با افزایشِ N در فرکانسِ قطع، تیزتر می‌گردد. فیلترهایِ باترورث، یکی به دلیلِ اخیر و نیز بدلیلِ سادگیِ ریاضیِ خاصی که برایِ جایِ قطب‌هاشان بدست می‌آید معروف شده‌اند.

پرسش ۱۱۱: نشان دهید قطب‌هایِ این فیلتر همواره رویِ دایره‌ای به شعاعِ فرکانسِ قطع(ω_c) و با فاصلهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{N}$ از یکدیگر قرار دارند و البته هرگز رویِ محورِ موهومی و سمتِ راستِ آن قرار ندارند.

پاسخ: کافی است توجه کنید که : $\left|B(j\omega)\right|^2=B(j\omega)B^*(j\omega)=B(j\omega)B(-j\omega)$ و در نتیجه داریم:

$$B(s)B(-s)=\frac{1}{1+\left(s/j\omega_c\right)^{2N}}$$

حال کافی است قطب‌هایِ این تابع را یافته و سمتِ چپی‌ها را گزینش کنید!

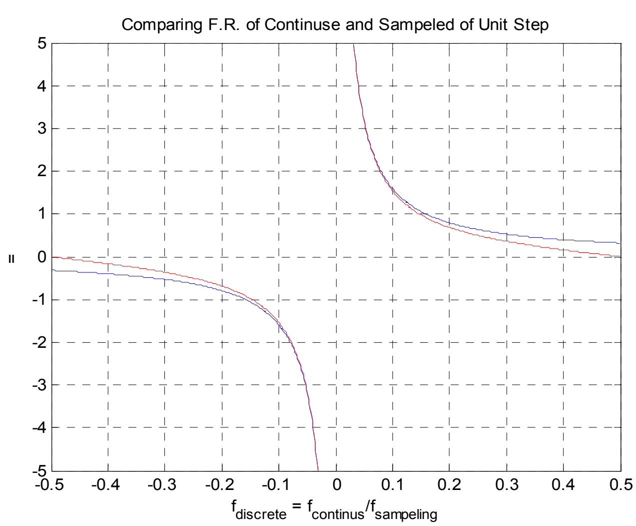
پرسش ۱۱۲: با توجه به پاسخِ پرسشِ پیشین، تابع تبدیلِ باترورثِ مرتبهٔ اول تا سوم را بدقت بدست آورید، بهمراهِ معرفیِ قطب‌هایِ آن و سپس پاسخِ فرکانسیِ هر یک را بصورتِ بودی نمایش دهید. پاسخ در کتابِ معروف، هست! لطفاً پیش از مراجعه به آن، خودتان حل کنید و سپس مقایسه کنید.

پاسخِ ۹: فرکانس‌هایِ f_s-f_b به پایین!

پاسخِ ۱۰: f_c

پاسخِ ۱۲: چنانچه دقت کنید با فرضی که گفته شده است، تنها فرقِ نمونه‌ها با پلهٔ گسسته که آشنا هستیم، در زمانِ صفر است که در اینجا نیم است بجایِ یک! پس این سیگنال را می‌توان نوشت: $u(n)-0.5\delta(n)$ پس زدِ آن خواهد بود: $\frac{z}{z-1}-0.5=\frac{1}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ که صفری در ۱- و قطبی در ۱ دارد. چنانچه به هندسهٔ داستان توجه کنید، فاز آن در تمامِ فرکانس‌ها(همهٔ دایرهٔ واحد) ۹۰- درجه است. در فرکانسِ صفر، بی‌نهایت و در فرکانس‌هایِ کم حدودِ $\frac{1}{\Omega}$ است! و در فرکانسِ کمی کمتر از $\frac{\pi}{3}$(یک‌ششم فرکانسِ نمونه‌برداری)، می‌شود: ۱ ، یعنی *0dB* ! و در فرکانسِ $\frac{\pi}{2}$ (ربعِ فرکانسِ نمونه‌برداری)، می‌شود: $\frac{1}{2}$، که یعنی *6dB-* ! و نهایتاً در فرکانسِ π (نصفِ فرکانسِ نمونه‌برداری)، می‌شود: صفر! و البته به لحاظِ جبری نیز براحتی می‌توان نوشت: $\frac{1/2}{j\tan\theta/2}$

اما، طیفِ سیگنالِ پیوستهٔ پله یعنی پیش از نمونه‌برداری، عبارتست از $\frac{1}{j\omega}$، به لحاظِ فاز، همان *90-* درجه است و کاملاً با بالا یکسان است ولی به لحاظِ اندازه، داستان فرق می‌کند و همواره $\frac{1}{\omega}$ است! ملاحظه می‌کنید که در فرکانس‌هایِ پایین‌تر از ربعِ فرکانسِ نمونه‌برداری، همخوانی دارد و با بزرگتر شدنِ فرکانس تا π ، اختلاف، زیاد می‌شود! این اختلاف ناشی از پدیدهٔ درهمیِ فرکانسی است که پس از نمونه‌برداری رخ می‌دهد و در واقع طیفِ سیگنالِ نمونه‌برداری شده همان طیفِ سیگنالِ اصلی باقی نمانده بلکه در فرکانس‌هایِ هماهنگِ فرکانسِ نمونه‌برداری عیناً تکرار شده و لذا حاصل جمعِ همهٔ این تکرارهاست و نه یکی از آنها !



پاسخِ ۱۳: روشن است که ابتدا باید از فرضِ گسسته به پیوسته بیاییم که این با قطارِ ضربه دیدنِ نمونه‌ها انجام می‌شود. حال کافی است پاسخِ ضربهٔ این نگهدارنده را بدست آوریم تا بتوانیم از رویِ آن تابع‌تبدیل را بدست

آوریم. پاسخِ ضربه نیز بسیار ساده با توجه به ویژگیِ گفته شده عبارتست از یک پالس به ارتفاعِ واحد و به عرضِ یک دورهٔ نمونه‌برداری! که این یعنی: $u(t)-u(t-T_s)$ و این یعنی تابع‌تبدیلِ $\frac{1}{s}-\frac{e^{-sT_s}}{s}=\frac{1-e^{-sT_s}}{s}$!

$$\xrightarrow{x(n)} \square_{T_s} \xrightarrow{x_p(t)} \boxed{\frac{1-e^{-sT_s}}{s}} \longrightarrow$$

پاسخِ ۱۶: مانندِ بالا دوباره کافی است که پاسخِ ضربه بدست آید. در هر دو صورتِ ناسببی و سببی، پاسخِ ضربه می‌شود: یک مثلث با ارتفاعِ واحد و قاعدهٔ $2T_s$ که ناسببیِ آن از $-T_s$ شروع و به T_s ختم می‌گردد ولی سببیِ آن لازم است از 0 شروع کند! که در صورتِ ناسببی داریم:

$$\tfrac{1}{T_s}\left[(t+T_s)u(t+T_s)-(t+T_s)u(t)\right]+\tfrac{1}{T_s}\left[(-t+T_s)u(t)-(-t+T_s)u(t-T_s)\right]$$

که این یعنی: $\frac{1}{T_s}\left[\frac{e^{sT_s}}{s^2}+\frac{e^{-sT_s}}{s^2}-\frac{2}{s^2}\right]=\frac{1}{T_s}\frac{e^{sT_s}+e^{-sT_s}-2}{s^2}$ و برای سببی کافی است این عبارت در e^{-sT_s} ضرب گردد.

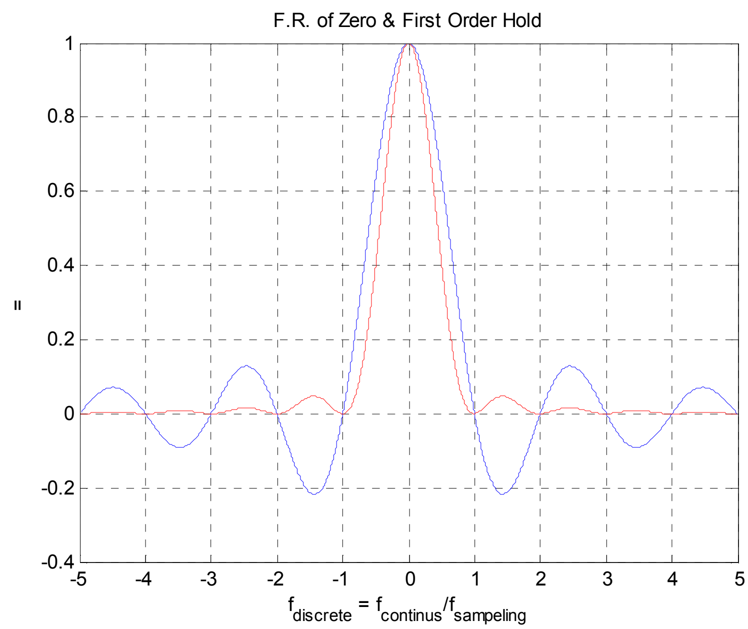
$$\xrightarrow{x(n)} \square_{T_s} \xrightarrow{x_p(t)} \boxed{\frac{1}{T_s}\cdot\frac{e^{sT_s}+e^{-sT_s}-2}{s^2}} \longrightarrow$$

با $s=j\omega$ داریم: $\frac{1}{T_s}\cdot\frac{2\cos(\omega T_s)-2}{(j\omega)^2}=T_s\cdot\frac{\sin^2\frac{\omega T_s}{2}}{\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)^2}=T_s\cdot\left(\frac{\sin\frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}}\right)^2$ ، ملاحظه کنید که هیچ فازی نمی‌دهد ولی اگر سببیِ آن را در نظر بگیریم، اینگونه نبوده و فازِ آن خواهد بود $-T_s\omega$ که یعنی تأخیرِ فاز ایجاد می‌کند!

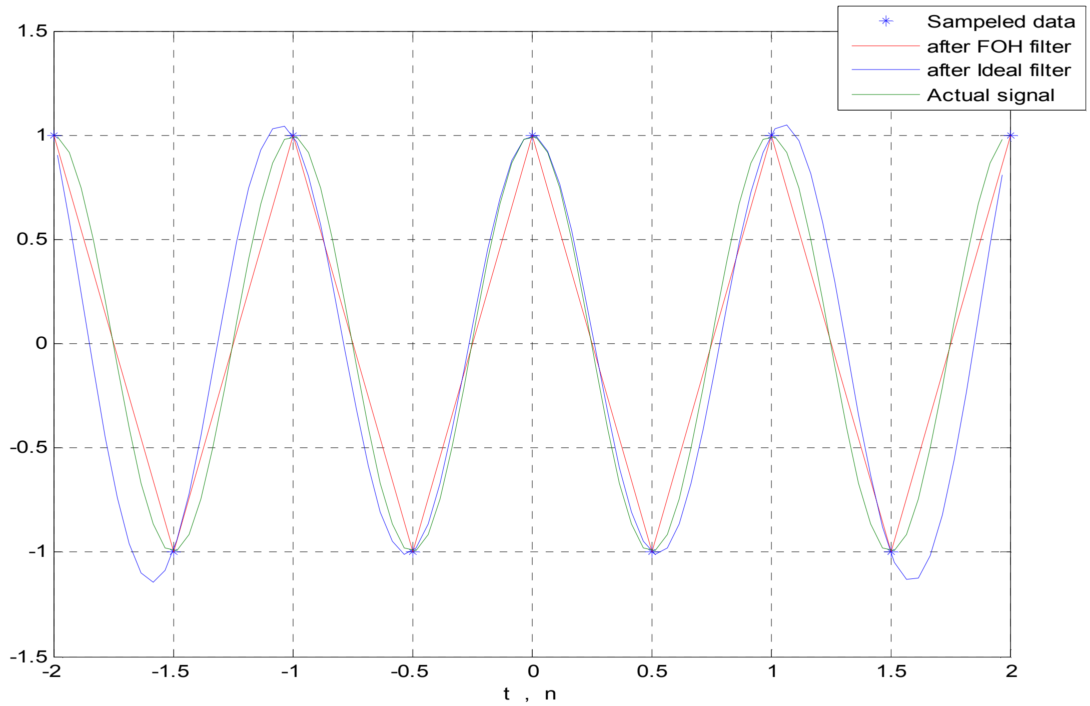
و اما نگهدارِ مرتبهٔ صفرام که در بالاتر آمد:

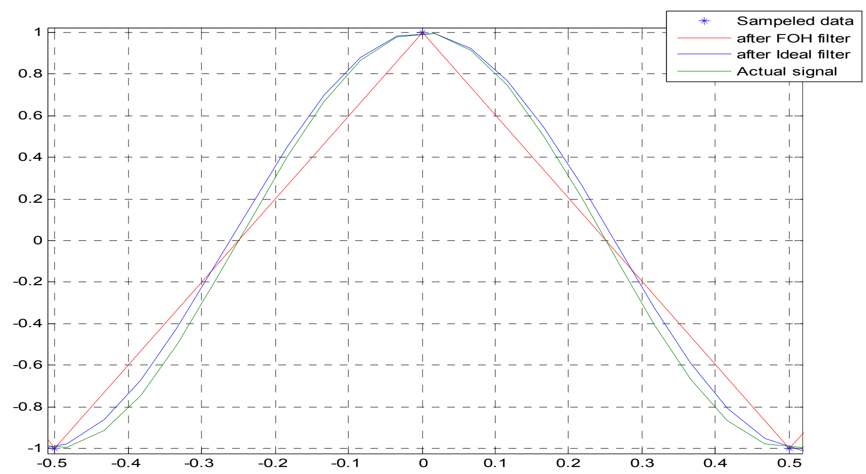
$$\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega}=e^{-j\omega T_s/2}\,\frac{e^{j\omega T_s/2}-e^{-j\omega T_s/2}}{j\omega}=T_s e^{-j\omega T_s/2}\left(\frac{\sin \omega T_s/2}{\omega T_s/2}\right)$$

ملاحظه می‌کنید که به لحاظِ اندازه، شباهتی به مرتبهٔ یک نیز دارد ولی تأخیرِ فاز دارد: $^{-\omega T_s}/_2$! اندازه‌های هر دو کنار هم در شکلِ زیر دیده می‌شوند.



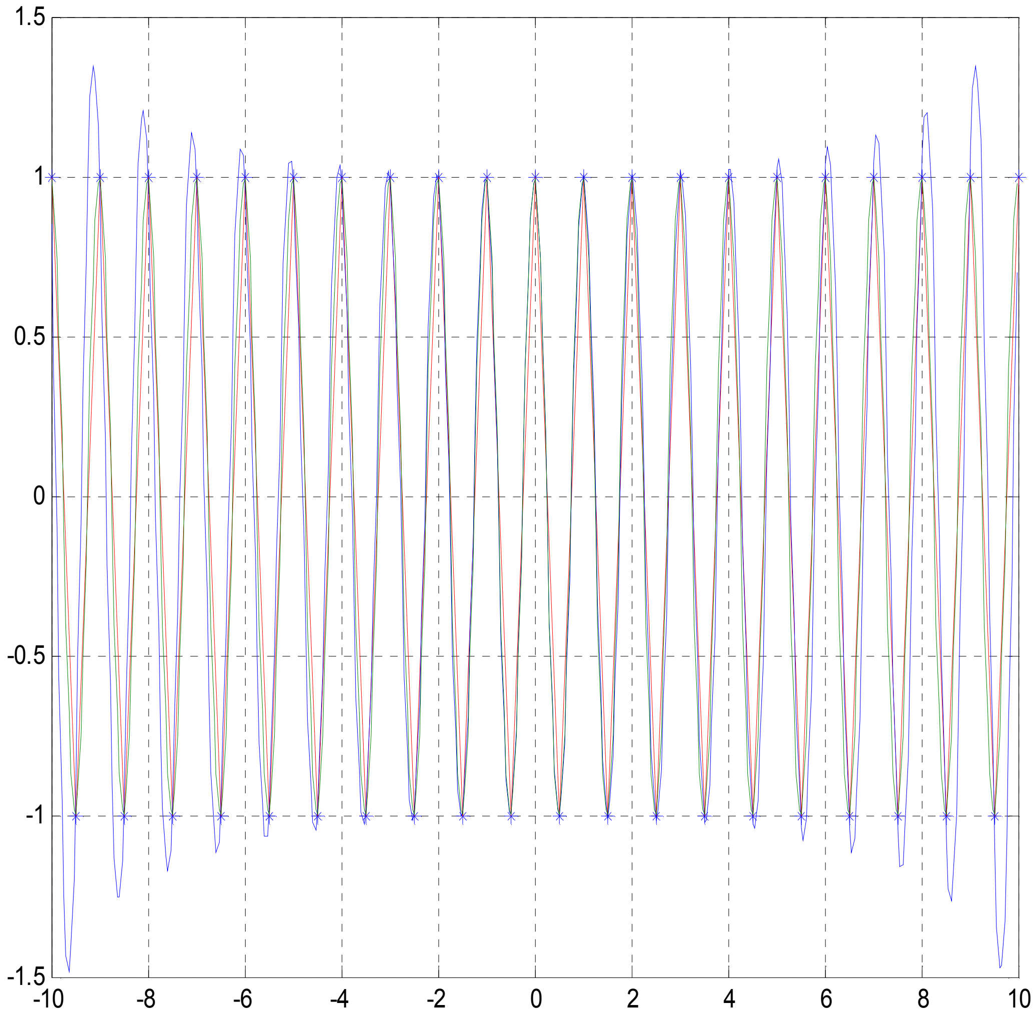
پاسخِ ۱۸: در اینجا تنها اشکال، جمعِ از ازل تا ابدی است که برایِ ما ممکن نیست! لذا باید خود را محدود کنیم به بازه‌ای که می‌توانیم. می‌توان دید که با هر چه بزرگتر گرفتنِ این بازه به بازیابیِ بهتری در میانه دست می‌یابیم. در شکل، سیگنالِ پیوستهٔ اصلی یعنی همان $cos(2\pi t)$ (سبز) ، نمونه‌ها با نمونه‌برداریِ $2Hz$ (*) ، اتصالِ نمونه‌ها به یکدیگر یعنی همان نگهدارِ مرتبهٔ اولِ ناسببی (قرمز) ، و نهایتاً پس از عبور از فیلترِ ایده‌آلِ با فرکانسِ قطعِ $1Hz$ (آبی) رسم شده‌اند.

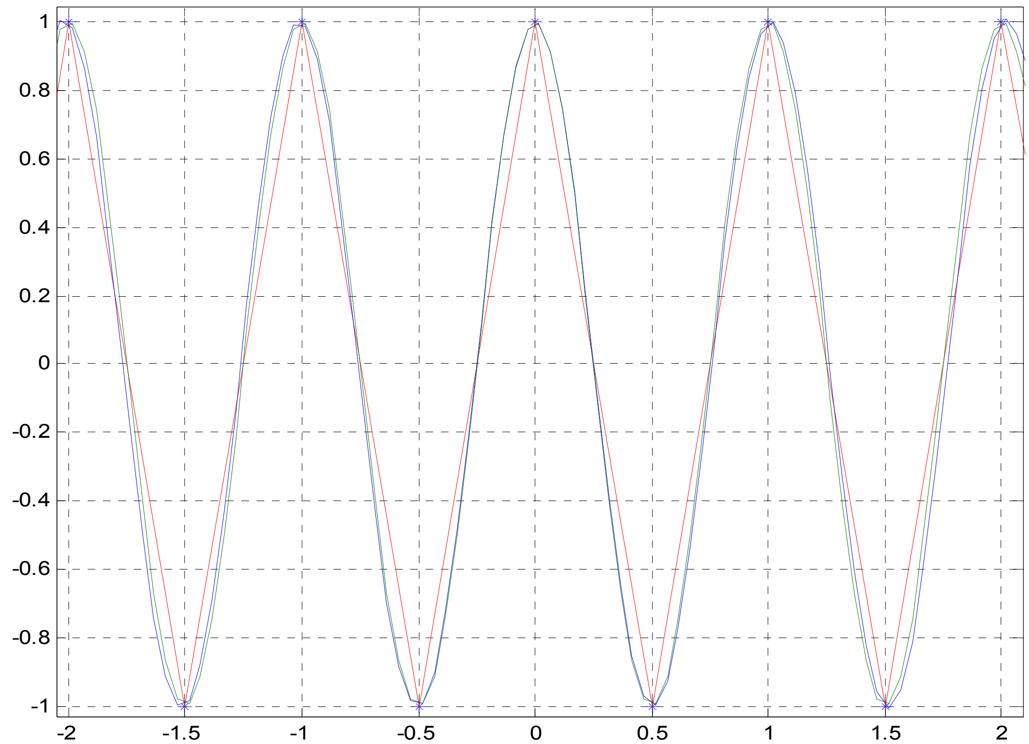


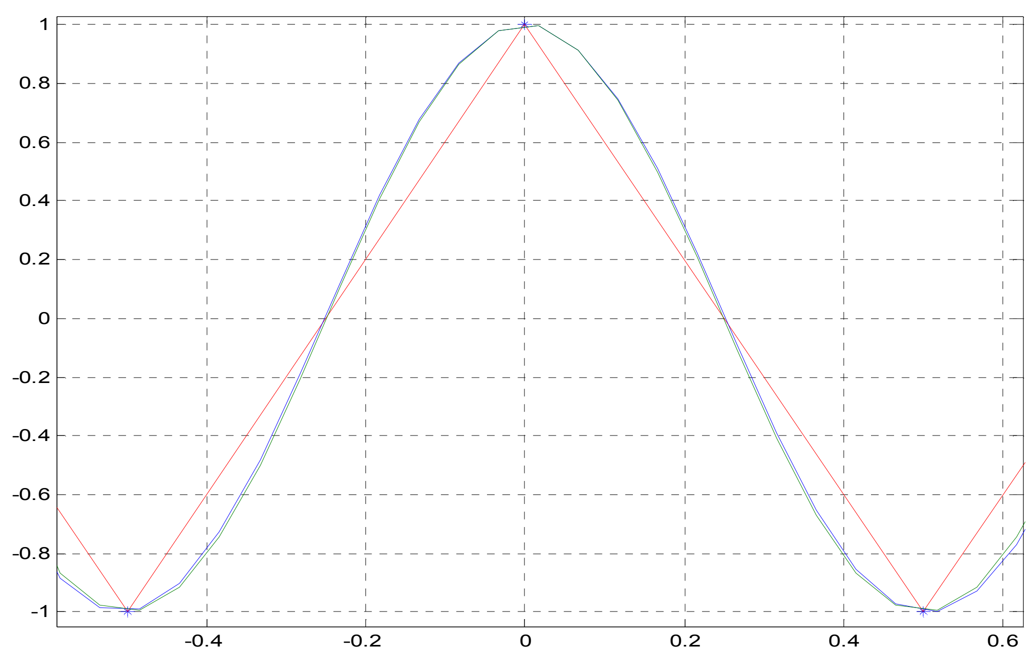


توجه کنید که فیلترِ نگهدارِ مرتبهٔ اول همانگونه که انتظار می‌رفت نتوانسته که بصورتِ دقیق میان‌یابی کند. اما فیلترِ ایده‌آل نیز که انتظار داشتیم دقیق میان‌یابی کند ظاهراً در اوایل و اواخر چندان خوب نبوده و نتوانسته و البته در وسطها خیلی نزدیک شده است!چرا؟! دلیل روشن است، چونکه ما در واقع لازم بود از خیلی قبل شروع کنیم و تا خیلی بعد ادامه دهیم ولی چنین نکرده‌ایم و فقط در بازهٔ -2 تا $+2$ آن فیلتر را استفاده نموده‌ایم

لذاست که نباید هم انتظار داشت، دقیقاً منطبق گردد! برای درکِ بهتر نمونه‌ای از انتخابِ بازه‌هایِ بزرگتر، مثلاً از *10-* تا *10* نیز آورده شده‌اند.

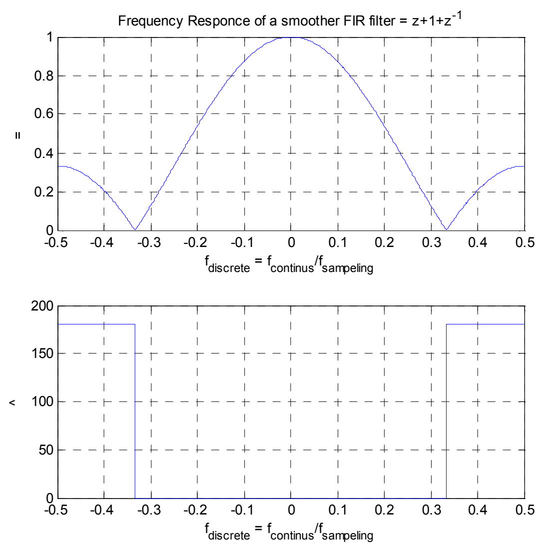



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

پاسخِ ۱۹: روشن است که در اینجا امیدی به بازیابیِ مناسبی از کسینوس نیست بلکه هماهنگ‌هایِ دیگر نیز در کار خواهند بود و همان رفتارِ پله‌ای دیده خواهد شد، چراکه این فیلتر ایده‌آل نبوده و از هماهنگ‌هایِ دیگر نیز به همراه خواهد آورد البته سببی هم هست و لذا تأخیر نیز دارد! به پاسخ فرکانسیِ آن در پاسخِ ۱۶ توجه کنید!

پاسخِ ۲۱: زدِ آن بسادگی خواهد بود: $\frac{1}{3}\left(z^{-1}+1+z\right)\xrightarrow{z=e^{j\Omega}}\frac{1}{3}\left(2\cos\Omega+1\right)$ و توجه کنید که این یک فیلترِ با پاسخِ ضربهٔ متناهی(FIR) است! و ضمناً هیچ قسمتِ موهومی ندارد! اندازه و فازِ آن در شکلِ زیر آمده است.



پاسخِ ۲۳: مرتبهٔ اولِ آن بسیار ساده همان مرتبهٔ اول با قطبی در ω_c خواهد بود. مرتبهٔ دومِ آن نیز بصورتِ زیر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}=-1=1\angle\left(\pi+2k\pi\right)\Rightarrow\frac{s}{j\omega_c}=1\angle\frac{\pi+2k\pi}{2N}\Rightarrow s=\omega_c\angle\frac{N\pi+\pi+2k\pi}{2N}$$

$$N=2\Rightarrow s=\omega_c\angle\frac{3\pi+2k\pi}{4}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}k=0\rightarrow\omega_c\angle\frac{3\pi}{4}\\ k=1\rightarrow\omega_c\angle\frac{5\pi}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{\omega_c^2}{\left(s-\omega_c\angle\frac{3\pi}{4}\right)\left(s-\omega_c\angle\frac{5\pi}{4}\right)}=\dfrac{\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\,\omega_c s+\omega_c^2}\\ k=2\rightarrow\omega_c\angle\frac{7\pi}{4}\\ k=-1\rightarrow\omega_c\angle\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

به همین سادگی نیز مرتبهٔ سوم و بالاتر نیز می‌تواند بدست آید و اما مرتبهٔ سوم:

$$N=3 \Rightarrow s=\omega_c \angle \tfrac{4\pi+2k\pi}{6}=\tfrac{2\pi+k\pi}{3}\begin{cases} \left.\begin{array}{l} k=0 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{2\pi}{3} \\ k=1 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{\pi}{1} \\ k=2 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{4\pi}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{\omega_c^3}{\left(s+\omega_c\right)\left(s-\omega_c \angle \tfrac{2\pi}{3}\right)\left(s-\omega_c \angle \tfrac{4\pi}{3}\right)} = \dfrac{\omega_c^3}{\left(s+\omega_c\right)\left(s+\omega_c s+\omega_c^2\right)} \\ k=3 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{5\pi}{3} \\ k=4 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{2\pi}{1} \\ k=-1 \rightarrow \omega_c \angle \tfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

و اما نمایشِ بودیِ پاسخفرکانسیِ هر سه، در شکلِ زیر آمده است. مرتبهٔ اول و دوم مفصلاً در کلاس آموزانده شده‌اند و نکتهٔ جدیدی برایِ رسمِ دستی ندارند! فقط توجه می‌دهم که در مرتبهٔ سوم نیز براحتی می‌توانستید از ترکیبِ یک مرتبهٔ اولِ ساده و یک مرتبهٔ دوم با ضریبِ میراییِ نوساناتِ *0.5*، کار را با دست نیز بخوبی تمام کنید.